



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitukset viikolla 39, 2005. **kt**=koitettävä, **ht**=harjoitustettava.

Koitettävät palautetaan onan ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikotkoa A4 ja nido arkki nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa koitettäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

Harjoitus 3

1) (kt) Lasken matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

inversi. Mitä huomaat? Luokittele matriisi. Mitä se tekee $\mathbb{R}^3$:n vektorille? Laske ominaisarvot ja vektorit.

2) (kt) Vie neljänmuoto $32x_1^2 - 60x_1x_2 + 7x_2^2 = -52$ pääakselimuotoon. Laske uudet kantavektorit ja identifioi neljänmuodon tyyppi.

3) (kt) Diagonalisoi matriisi

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

4) (ht) Etsi ominaisvektorikanta ja diagonalisoi.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5) (ht) Käyttäen diagonalisointia etsi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

neliöjuuri, siis matriisi R siten, että $R^2 = A$. Kuinka monta juurta näin sait? Tänä ongelmana on vaikea ratkaista ilman diagonalisointia.

6) (ht) Etsi symmetrinen matriisi C siten, että

$$x^T C x = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - 5x_3^2.$$

- 7) (ht)
- Laske normit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_\infty$ vektoreille $(4, -3, -1, 5, -5)^T$ ja $(5, 4, 3, 3, 2, 1)^T$.
 - Näytä, että avarudessa $\mathbb{R}^n$ pätee $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ ja $\|x\|_1/n \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Näiden epäyhtälöiden nojalla normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ sanotaan olevan ekvivalentteja.

8) (ht) Osoita, että jos vektorinormiksi valitaan $\sum_{i=1}^n |x_i|$, matriisinnormille pätee

$$\|A\| = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}|.$$

9) (ht) Olkoon $A = uv^T$. Mikä on matriisin A rangi? Näytä, että u on matriisin A ominaisvektori ja laske sitä vastaava ominaisarvo. Mitkä ovat matriisin A muut ominaisarvot ja miksi?

1. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $\det(A) = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$
 $\Rightarrow A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A$
 $\Rightarrow B^{-1} = B$

lächern an. arbor ja an. verlorne

$\det(B - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 - 1$
 $\Rightarrow$ an. arbor $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$

$\lambda_1: (B - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} x = 0$

selbst
 $x = (1 \ 0 \ 0)^T$ an
 $x_3 = -\frac{(\cos \theta - 1)}{\sin \theta} x_2$ (2. Komponente)
 $\sin \theta x_2 + (-\cos \theta - 1)x_3 = \left(\sin \theta + \frac{(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{\sin \theta} \right) x_2 = 0$
 $= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1}{\sin \theta} x_2 = 0$

1° $\sin \theta \neq 0$ $(\theta \neq n\pi)$ machen an. verlor
 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix}^T$

2° $\theta = 2n\pi \Rightarrow \sin \theta = 0, \cos \theta = 1$
 machen an. verlor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$

3° $\theta = (2n+1)\pi \Rightarrow \sin \theta = 0, \cos \theta = -1$
 machen an. verlor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$

$\lambda_2: (B - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta + 1 & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta + 1 \end{pmatrix} x = 0$

1° $\theta \neq n\pi$
 an. verlor $x_3 = -\frac{(\cos \theta + 1)}{\sin \theta} x_2$
 $\sin \theta x_2 + (-\cos \theta + 1)x_3 = \left(\sin \theta - \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\sin \theta} \right) x_2 = 0$
 an. verlor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-(\cos \theta + 1)}{\sin \theta} \end{pmatrix}^T$

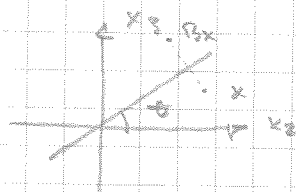
2° $\theta = 2n\pi$
 an. verlor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$

3° $\theta = (2n+1)\pi$
 an. verlor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$

B an. peilans $x_2 x_3$ - Tasse

$\det(B) = -1 \Rightarrow$ ei. orthogonale
 selbster. symmetrischen

$\forall \theta: \cos \theta = -\cos(\theta + \pi) \quad \sin \theta = -\sin(\theta + \pi) \Rightarrow$ ei. v. symmetrisch.



2. nur Werten $A = \begin{pmatrix} 32 & -30 \\ -30 & 7 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Nur $x^T A x = 32x_1^2 - 60x_1x_2 + 7x_2^2$

bestimmen om. arwert ja vektoriz

$\det(A - \lambda I) = (32 - \lambda)(7 - \lambda) + 30^2 = 0$
 $\Rightarrow$ om. arwert $\lambda_1 = 52$ $\lambda_2 = -13$

$\lambda_1: \begin{pmatrix} -20 & -30 \\ -30 & -45 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} x = 0$
 median om. vektor $(3 \ -2)^T = \vec{v}_1$

$\lambda_2: \begin{pmatrix} 45 & -30 \\ -30 & 20 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} x = 0$
 median om. vektor $(2 \ 3)^T = \vec{v}_2$

nur Werten om. vektoriz je Wain
 ne medianierung orthogonale können
 (siehe $A^H = A$)

$|\vec{v}_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = |\vec{v}_2|$

Werten $v_i = 1/\sqrt{13} \vec{v}_i$

Werten $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ $V = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]$
 Nur $V^{-1} = V^T$

$AV = [A_{v_1} \ A_{v_2}] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2] = VD$
 $\Rightarrow V^T A V = D$

Werten $y = V^T x \Leftrightarrow x = Vy$

$x^T A x = y^T V^T A V y = y^T D y$

Wien $x^T A x = -52$
 $\Leftrightarrow y^T D y = -52$
 $\Leftrightarrow 52y_1^2 - 13y_2^2 = -52$

Wien oder indefinit

$$3. \quad A := \begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

Wskurven an. Wert ja an. Wskurven

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda) \left((5 - \lambda)(-10 - \lambda) - (-5)(-20) \right) \\ = (5 - \lambda) \left(10(-10 - \lambda) - 5(-20) \right) \\ = (5 - \lambda) \left(10(-5) - 5 \cdot 5 \right) \\ = -\lambda^3 + 225\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \pm \sqrt{225} = \pm 15$$

$$\lambda = 0: \begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} x = 0 \quad \begin{matrix} \downarrow -2 \\ \downarrow -1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

Wskurven $x_1 = (2 \ 0 \ 1)^T$

$$\lambda_2 = 15: \begin{pmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 10 & -10 & -20 \\ 5 & -5 & -25 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} x = 0 \quad \begin{matrix} \downarrow 1 \\ \downarrow v_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} x = 0$$

Wskurven $x_2 = (1 \ 1 \ 0)^T$

$$\lambda_3 = -15: \begin{pmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 10 & 20 & -20 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \quad \begin{matrix} \downarrow -2 \\ \downarrow -4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Wskurven $x_3 = (0 \ 1 \ 1)^T$

Wskurven $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad V = [x_1 \ x_2 \ x_3]$

$$AV = VD \Rightarrow V^{-1}AV = D$$

$$V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$