



Mat-1.413 : Matematiikan peruskurssi C3

Tietokoneharjoitus 3

Tietokoneharjoitukset viikolla 44, 2005. Kysy neuvoa tehtäviin ryhmän assistentilta.

Voit myös käyttää kurssin kotisivujen <http://math.tkk.fi/teaching/c3/> materiaalia hyväksesi.

1. a) Tutkitaan Möbius-kuvausta

$$M(z) = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}.$$

Parametrisoi esimerkiksi $1/2$ -säteinen origokeskinen ympyrä ja tulosta sen ja sen kuvan kuva. Käytä **ParametricPlot**-rutiinia ja anna z_0 :lle useita arvoja väliltä $0 < |z_0| < 1$. Mitä huomaat?

Mathematican **ComplexMap**-paketissa on hyödyllisiä tulostusrutiineja. Lataa paketti ja tutustu erityisesti **CartesianMap** ja **PolarMap** kuvaustapoja. Käytä ed. Möbiuskuvausta testifunktiona. Ymmärrätkö tulostuvien käyräviivaisten koordinaatistojen merkityksen. Mistä paistaa Möbius-kuvauksen konformisuus?

- b) Möbius-kuvauksen $M(z)$ kerroinmatriisi on $\begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ \bar{z}_0 & -1 \end{pmatrix}$. Käännä se, muodosta uudesta kerroinmatriisista $\widetilde{M}(z)$ ja osoita, että se on alkuperäisen kuvauksen $M(z)$ käänteiskuvauks.

2. Tutkitaan integraalia $\int_0^{2\pi} d\theta / (1 + 3 \cos^2 \theta)$. Laske vastaava määräämätön integraali **Integrate**-rutiinilla. Plottaa funktio. Funktiolla on hankalia epäjatkuvuuksia, jotka sekoittivat varhaiset Mathematican versiot. Laske sitten annettu määrätty integraali. Oikea vastaus on π . Käytä komentoa **Simplify**, jos et heti saa tätä vastausta. Hypyn korkeus on $\pi/2$. Jotkut ohjelmistoversiot eivät noteeranneet kuin toisen epäjatkuvuuden ja antoivat tulokseksi siten $\pi/2$ (vrt. plotti). Välituloksesta huomaat, että Mathematica laskee integraalin kompleksilukujen avulla.

3. Laske **Sum**-rutiinilla z -muunnokset $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ jonoille

$$\text{a) } a_n = z^n / (n+2)! \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ jaollinen kolmella,} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Miten päättelet tuloksista sarjan suppenemisalueen?

4. Laske n :s Fibonaccin luku luentoprujussa olevalla kaavalla. Huomaa, että jos n on riittävän suuri niin Mathematica ei enää osaa tulkita sitä kokonaisluvuksi! Kokonaisluvun saat vastauksesta käyttämällä komentoa **Simplify**. Huomaa, että tämä on aivan eri menetelmä, kuin aikaisemmin Mikroharjoituksissa esitetty rekursiivinen tapa laskea Fibonaccin lukuja.
5. (Fourier-sarjoja hiukan etuajassa). Notebookissa on annettuina summat

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)x$$

ja

$$\pi + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx.$$

Tulosta noiden kuvaajia kasvavilla n :n arvoilla. Mitä huomaat? Ne ovat äärellisiä Fourier-sarjoja eräille jaksollisille, epäjatkuville funktioille. Arvaatko mille? Epäjatkuvuuskohtiin keskittyvä värähtely on nimeltään Gibbsin ilmiö. Viimeinen notebookin kohta laskee neliöl-lisen virheen suurutta jälkimmäiselle sarjalle. Virheen suuruus on minimaalinen juuri Fourier-sarjalle.