



Mat-1.413 : Matematiikan peruskurssi C3

Tietokoneharjoitus 3

Tietokoneharjoitukset viikolla 44, 2005. Kysy neuvoa tehtäviin ryhmän assistentilta.

Voit myös käyttää kurssin kotisivujen <http://math.tkk.fi/teaching/c3/> materiaalia hyväksesi.

1. a) Olkoon

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad y_n = \begin{pmatrix} e^{i2\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi/n} \end{pmatrix},$$

missä n on luonnollinen luku. Mikä on x :n aste eli pienin $m > 1$ siten, että x^m on identiteettimatriisi? Määritä samalla tavalla aste y_n :lle. Näytä, että $(y_n x)^2$ on identiteetti. Huom! Mathematicassa imaginaariyksikkö on I ja Pii Pi . Matriisit x ja y_n muodostavat erään tuntemasi ryhmän. Mikä se on?

- b) Laske matriisien

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

asteet. Selvitä mikä on pienin $k \geq 1$, jolle pätee $ba = a^k b$? Elementit a ja b generoivat Kvaternioiden ryhmän. Kuinka monta alkioita ryhmässä on? (Kaikki ovat muotoa $a^n b^m$, $n, m \geq 0$). Kvaternioita käytetään hyväksi mm. 3D-tietokonegrafiikassa!

2. Visualisoidaan reaalinen eksponenttifunktio komennolla

```
Plot[Exp[x], {x, -2, 2}]
```

ja sitten kompleksinen eksponenttifunktio komennolla

```
Plot3D[Abs[Exp[x + Iy]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
```

```
Plot3D[Abs[Exp[x + Iy]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
```

Tämän komponenttiesityksen voi johtaa de Moivre'n kaavalla. Suorita sitten komennot

```
Plot3D[Abs[Exp[x + Iy]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
```

```
Plot3D[Abs[Exp[x + Iy]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
```

Osaatko selittää, miksi pinnat näyttävät sellaisilta kuin ovat?

3. a) Suorita komento `ComplexExpand[Sin[x+Iy]]` ja vertaa tulostetta Kreyszigin kaavoihin. Edellä x ja y ovat luonnollisesti reaalisia.

- b) Tulosta sitten reaalinen ja kompleksinen sini käyttäen `Plot`- ja `Plot3D`-komentoja. Käytä jälkimmäisessä apuna `Abs`-, `Arg`-, `Re`- ja `Im`-komentoja. Valitse asialliset välit eli huomioi jaksollisuus.
4. Mathematicassa on funktio `Log`, joka hyväksyy kompleksia argumentteja. Laske `Log[I]`. Mitä huomaat? Entä kun lasket `Log[-1 ± ε I]` pienellä $\varepsilon > 0$? Tulosta funktion `Log` argumentti ja moduli sopivassa alueessa. Näyttääkö oikealta? Osaako ohjelma laskea I^I ? Miten autat sen alkuun?
5. Notebookin viimeinen osio kuvaa pinnan parametrisesti. Ymmärrätkö esitystavan? Tulosta pinta `ParametricPlot3D`-komennolla. Kyseessä on Möbiuksen pinta. Se on esimerkki ns. orientoitumattomasta pinnasta (ei voida määritellä sisä- ja ulkopuolta).