



Mat-1.413 : Matematiikan peruskurssi C3

Tietokoneharjoitus 2

Tietokoneharjoitukset viikolla 42, 2005. Kysy neuvoa tehtäviin ryhmän assistentilta.

Voit myös käyttää kurssin kotisivujen <http://math.tkk.fi/teaching/c3/> materiaalia hyväksesi.

1. Valitse mieleisesi reaalinen 3×3 - tai 4×4 -matriisi a . Tutki ensin komennon `Max[Apply[Plus, Abs[a]]]` sisältämiä funktioita yksinkertaisilla listoilla ja laske sitten ko. arvo. Mikä matriisnormi se on? Entä muiden matriisin a normien (rivi, sarake, Frobenius) laskeminen? Huomaa, että a^2 ei ole matriisin neliö, vaan - juuri sopivasti - matriisi, jonka alkiot on neliöity! Laske sitten lauseketta $\|a^n\|^{1/n}$ käyttäen komentoa `MatrixPower[a,n]`, n . juurta ja em. normeja. Konvergoiko?

Laske matriisin a spektri komennolla `Eigenvalues`. Mitä huomaat? Raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ on matriisin a spektraalinormi.

Jos matriisin a^n alkiot ovat kovin suuria suurilla n , voit katsella matriisia esimerkiksi komennolla

```
MatrixForm[NumberForm[N[MatrixPower[a,n]],5]].
```

Keksitkö, miksi raja-arvo näyttää samalta matriisinnormista riippumatta? Kokeile useilla eri matriiseilla, jolloin näet, miten matriisin a^n alkioiden suhteet muuttuvat.

2. Fibonaccin jono määritellään $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geq 2$, $x_1 = x_0 = 1$. Laske muutama ensimmäinen termi. Jos määritellään $x^{(n)} = (x_n, x_{n-1})^T$ niin mille matriisille A pätee $x^{(n)} = Ax^{(n-1)}$? Kyseessä on dynaaminen systeemi, joka on suoraan analoginen luennoilla käsitellylle jaetulle kahden muuttujan systeemille. Laske `MatrixPower`-komennolla sadas Fibonaccin luku. Laske A :n spektri. Jos $\lambda_1 > \lambda_2$ niin tutki jonon A^n/λ_1^n käyttäytymistä. Mitä voit päätellä Fibonaccin lukujen kasvuvauhdista?

3. Mathematican komento `NDSolve` ratkaisee numeerisesti differentiaaliyhtälöitä ja myös systeemejä. Itse ratkaisu tapahtuu esimerkiksi koodilla

```
Sol=NDSolve[{x'[t]==-0.5x[t]-y[t], y'[t]==x[t]-y[t],  
            x[0]==3, y[0]==1}, {x,y}, {t,10}].
```

Se tulostetaan esimerkiksi kirjoittamalla

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.Sol], {t,0,10}].
```

(Kuvaa on syytä taas skaalata, jotta mittasuhteet ovat oikeat.)

Tutki systeemejä

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$$

eri alkuarvoilla ja muutellen parametrin t sallittua aluetta. Keksitkö, miten saat useamman

käyrän samaan kuvaan?

Laskemalla ominaisarvot voit päätellä ratkaisukäyrien ”suunnan” (= parametrin t kasvusuunnan). Mitkä ovat systeemien kvalitatiiviset tyypit?

Tutki myös systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= y \end{cases}$$

vaihtamalla parametriväliä, kun x ja y ovat lähellä nollaa.

4. (a) Tutkitaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x} &= (1 - x^2 - y^2)x + 4y \\ \dot{y} &= -4x + (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}.$$

Määrittele ensin vektori

`f[x_,y_] := {{(1-x^2-y^2)x+4y},{-4x+(1-x^2-y^2)y}}`.

Derivoi se alkioittain (`D[f[x,y][[1]],x]` jne.) ja muodosta näistä 2×2 -matriisi a . Laske mikä matriisi a on origossa. Käytä esimerkiksi komentoa `a/.{x->0,y->0}`. Mitä tulos merkitsee?

Käyttäen komentoa `NDSolve` tulosta systeemin ratkaisuja. Mallia voit ottaa edellisestä tehtävästä. Käytä esimerkiksi alkutiloja $(0,0)$, $(0,0.1)$, $(0,0.5)$ ja $(0,10)$. Skaalaa akselit tarpeen mukaan. Mitä havaitset? Entä alkutilasta $(0,1)$? Olisitko voinut arvata tulokset suoraan yhtälöstä?

- (b) Van der Polin systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - x^3 + y \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

voidaan analysoida edellisen esimerkin tapaan, mutta systeemi on kvalitatiivisesti hankalampi.

Linearisoi systeemi jälleen origossa ja tutki stabiilisuutta (ominaisarvoista). Laske sitten ratkaisukäyrät esimerkiksi alkutiloista $(0,0)$, $(0,0.1)$, $(0,1.25)$ ja $(0,2)$ lähtien. Skaalaa akselit, että näet rajasyklin oikean muodon. Esimerkiksi $t \in [0,50]$ toimii aika hyvin ratkaisuvälinä.

5. Laske `LaplaceTransform`-rutiinilla muunnokset funktioille `Exp`, `Exp[t]` ja `Exp[ct]`. Huomaa syntaksin täsmällisyys! Laske $\mathcal{L}(t^n)$. Konsultoi helppiä, jos vastaus ei näytä ymmärrettävältä (Section 3.2.10). Huomaa, että rutiini osaa laskea funktion derivaattojen Laplace-muunnoksia. Kokeile laskea esimerkiksi $\mathcal{L}(t')$ tai korkeampi derivaatta.