



Mat-1.413 : Matematiikan peruskurssi C3

Tietokoneharjoitus 1

Tietokoneharjoitukset viikolla 39, 2005. Kysy neuvoa tehtäviin ryhmän assistentilta.

http://math.tkk.fi/teaching/c3/ materiaalia hyväksesi.

1. Määritellään matriisi

$$A = [\alpha_{ij}] : \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } j = i + 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Generoi matriisi komennoilla **Table** ja **If**. Tulosta komennolla **MatrixForm**, kunhan olet ensin varmistunut tuloksesta. Dimensioksi voit valita esimerkiksi 7×7 . Tutki käskyllä **MatrixPower**, miten A^n käyttäytyy. Tällainen matriisi on *nilpotentti*.

2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Miten generoit sen komennoilla **Table** ja **If** antamatta kaikkia alkioita eksplisiittisesti. Laske spektri ja ominaisvektorit. Laske ominaisavaruudet komennolla

`NullSpace[A-lambda*IdentityMatrix[5]]`

Täsmää edelliseen? Tee sama analyysi matriisille

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. a) Generoi kaikki neljän symbolin permutaatiot eli 4×4 -permutaatiomatriisien lista.

Mathematican **Permutations**-komento on kätevä funktio tähän tarkoitukseen. Tietoa funktion käytöstä saat komennolla **?Permutations**. Kuinka monta alkioita listassa on? Miten se liittyy lukuun $4!$. Laske elementtien inverssit ja tulot. Mitä huomaat? Alkiot muodostavat esityksen ryhmälle S_4 . Laske vielä alkioiden determinantit. Mitä huomaat?

b) Mathematican paketissa `DiscreteMath'Combinatorica'` on komento `RandomPermutation`. Tutki Helpin avulla, mitä se tekee. Ohjelmoi sitten (yksirivinen) koodi, joka antaa satunnaisen 52×52 -permutaatiomatriisin. Huomaa, että tämänkokoisia permutaatiomatriiseja on suunnaton määrä, etkä voisi millään tuottaa kaikkia permutaatioita (ohjelma todennäköisesti kaatuisi!).

4. Olkoon

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Markovin ketjun siirtotodennäköisyysmatriisi P . Markovin ketjun tasapainotila t on stokastinen vektori (alkiot epänegatiivisia, alkiosumma = 1), jolla on ominaisuus

$$tP = t$$

Mikäli ketju on ergodinen, suppenee ketju tasapainotilaan mistä tahansa alkutilasta a lähtien. Tämä tarkoittaa sitä, että $aP^n \rightarrow t$, kun $n \rightarrow \infty$. Valitse mielivaltainen stokastinen vektori alkutilaksi ja laske sitten esimerkiksi käskyllä

`MatrixForm[a.MatrixPower[P, n]]`

tila hetkellä n . Suppeneeko prosessi kohti tasapainotilaa? Testaa arvauksesi sijoittamalla se tasapainoehdon vasemmalle puolelle.

5. Tutkitaan käyrää

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 7x_2^2 = 9.$$

Formuloi sse neliömuotona, ratkaise ominaisarvot ja -vektorit sekä kirjoita pääakselimuoto. Hahmottele paperille. Komento

`ContourPlot[f[x1, x2], {x1,...},{x2,...},ContourSmoothing->Automatic]`

antaa parven tasokäyriä. Mikä näistä on alkuperäisen yhtälön ratkaisu?