



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 9

Harjoitukset viikolla 47, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) (**kt**) Etsi ylärajat seuraaville integraaleille ML -epäyhtälön avulla, kun C on jana pisteestä 0 pisteeseen $3 + 4i$.

ML -epäyhtälö: $|\int_C f(z)dz| \leq ML$, missä L on polun C pituus ja M on vakio siten, että $|f(z)| \leq M$ kaikissa polun C pisteissä z .

(a) $\int_C \operatorname{Ln}(z+1) dz$

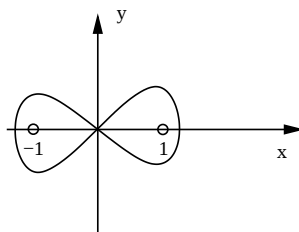
(b) $\int_C e^z dz$

- 2) (**kt**) Laske funktion $f(z) = (z^3 + \sin z)/(z - i)^3$ integraali yli kompleksitason neliön $\{z = x + iy : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ reunakäyrän vastapäivään.

- 3) (**kt**) Laske seuraavat integraalit:

(a) $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$; C on kuvan käyrä.

(b) $\oint_C \frac{dz}{1+z^3}$; C on $|z+1|=1$ vastapäivään.



- 4) (**ht**) (a) Tarkista, että Cauchyn lause pätee, kun integroidaan funktiota $z \mapsto z^2$ vastapäivään pisteiden -1 , 1 , $1+i$ ja $-1+i$ virittämän suorakaiteen reunaa pitkin.
- (b) Millä kaikilla suljetuilla ja yksinkertaisilla poluilla C Cauchyn lauseesta seuraa, että

- (i) $\oint_C \frac{dz}{z} = 0$,
- (ii) $\oint_C \frac{\cos z}{z^6 - z^2} dz = 0$ ja
- (iii) $\oint_C \frac{\exp(1/z)}{z^2 + 9} dz = 0$?

- 5) **(ht)** (a) Integroi $f(z) = 1/z$ vastapäivään yksikköympyrän yli. Voidaanko Cauchyn lausetta soveltaa?
- (b) Laske integraali $\oint_C \frac{\sin z}{z+3i} dz$, kun C on $|z - 2 + 3i| = 1$ vastapäivään kierrettynä.
- 6) **(ht)** Integroi $f(z)$ vastapäivään yksikköympyrän yli. Voidaanko Cauchyn lausetta soveltaa?
- (a) $f(z) = |z|$
- (b) $f(z) = \bar{z}$
- 7) **(ht)** Määritellään sinin käänteisfunktio $w = \sin^{-1} z$ relaatiosta $\sin w = z$. Käytä hyväksesi määritelmää $\sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$ ja näytä, että
- (a) $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$.
- (b) Onko $\sin^{-1}$ yksi- vai moniarvoinen funktio?
- 8) **(ht)** Näytä, että $\oint_C (z - z_1)^{-1} (z - z_2)^{-1} dz = 0$ jokaisella suljetulla ja yksinkertaisella polulla C , joka kiertää pisteet z_1 ja z_2 .
- 9) **(ht)** Laske jonon $\{1/(n+1)!\}_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos. Laske myös käänteismuunnos $X^{-1}(1/(1 - z^{-3}))$.