



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 8

Harjoitukset viikolla 46, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) **(kt)** Laske logaritmin avulla kaikki arvot:

$$\text{a) } \sqrt[6]{-1} \quad \text{b) } (1 + 3i)^i \quad \text{c) } (-5)^{2-4i}$$

- 2) **(kt)** a) Etsi kuvauksen $w = \frac{z-i}{-iz+1}$ käänteiskuvaus. Osoita, että w kuvaa suorat $x = c =$ vakio ympyröiksi, joiden keskipisteet sijaitsevat suoralla $v = 1$.
b) Etsi se Möbius-kuvaus, joka kuvaa z -tason yksikkökiekon w -tason yksikkökielelle ja pisteen $z = \frac{i}{2}$ origoon ($w = 0$). Piirrä myös suorien $x =$ vakio ja $y =$ vakio kuvat tässä kuvauksessa.
- 3) **(kt)** a) Mikä on joukon $\{z : 2 \leq |z| \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ kuva kuvauksessa $w = \ln z$?
b) Etsi se Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet $0, i, -i$ pisteille $2i, \infty, i + 1/2$.
- 4) **(ht)** a) Miksi analyyttiset kuvaukset kuvaavat käyrät $|z| =$ vakio ja $\arg(z) =$ vakio aina käyriksi, jotka leikkaavat suorassa kulmassa.
b) Missä pisteissä kuvaus $w = \cos(z^2 + 1)$ ei ole konforminen?
- 5) **(ht)** (a) Osoita, että Möbius-kuvauksen käänteiskuvaus ja kahden Möbius-kuvauksen yhdiste ovat Möbius-kuvauksia.
(b) Etsi kuvauksen $w = \frac{3z+4i}{z+21}$ käänteiskuvaus suoraan, käyttämättä kaavaa $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$.
- 6) **(ht)** Osoita, että edellisen tehtävän a)-kohdan kuvausten kerroinmatriisit saat helposti kerromalla ja kääntämällä kerroinmatriisit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- 7) **(ht)** (a) Olkoon $D = \{z : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Hahmottele funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z) = 1/z$, kuvajoukko w -tasossa.

(b) Kuin edellä, mutta $D = \{z : |\operatorname{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{6}\}$ ja $f(z) = z^4$.

8) **(ht)** Laske $\int_C f(z)dz$, missä $f(z) = (z-1)^{-1} - (z-1)^{-2}$ ja C on ympyrä $|z-1| = \frac{1}{2}$ vastapäivään kierrettynä.

9) **(ht)** Laske $\int_C |z|dz$ pisteestä $A : z = -i$ pisteeseen $B : z = i$, kun C on

(a) jana AB ,

(b) yksikköympyrän kaari vasemmassa puolitasossa ja

(c) yksikköympyrän kaari oikeassa puolitasossa.