



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 7

Harjoitukset viikolla 45, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) **(kt)**
 - (a) Etsi funktion $f(z) = z^2 + 4z - 1$ reaali- ja imaginääriosat.
 - (b) Saakoon z arvonsa joukossa $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Etsi juuri se w -tason alue, jossa kuvauksen $w = \frac{1}{z}$ arvot ovat. Piirrä joukot.
 - (c) Derivoi $(2 + iz)^6$ pisteessä $2i$.
- 2) **(kt)**
 - (a) Derivoi $\frac{z+i}{z-i}$.
 - (b) Derivoi $\frac{z^2}{(z+i)^2}$.
 - (c) Osoita, että $f(z) = |z|^2$ on derivoituva ainoastaan pisteessä $z = 0$ ja siis f ei ole missään analyyttinen.
Vinkki: $|z + \Delta z|^2 = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z})$.
- 3) **(kt)**
 - (a) Etsi yhtälön $\cosh z = \frac{1}{2}$ kaikki ratkaisut.
 - (b) Millä kaikilla z
 - (i) $\cos(z)$
 - (ii) $\sin(z)$saa reaalisia arvoja?
- 4) **(ht)** Osoita derivoimalla, että $\Re \cos z$ ja $\Im \sin z$ ovat molemmat harmonisia.
- 5) **(ht)** Esitä muodossa $u + iv$.
 - (a) $\cos(10i)$
 - (b) $\cos(\pi + \pi i)$
 - (c) $\cosh(-2 + 3i)$
- 6) **(ht)**
 - (a) Luonnostele joukon $\{z : |\arg z| \leq \frac{\pi}{8}\}$ kuva kuvauksessa $w = z^2$.

- (b) Etsi ja piirrä alueen $\{z : \Im z > 0\}$ kuva kuvauksessa $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$.
- 7) **(ht)** (a) Onko $v(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ harmoninen funktio? Jos näin on, etsi vastaava analyyttinen funktio $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- (b) Määritä a siten, että $u(x, y) = e^{2x} \cos(ay)$ on harmoninen ja etsi vastaava harmoninen konjugaatti.
- (c) Kuin (b)-kohta funktiolla $u(x, y) = \sin(x) \cosh(ay)$.
- 8) **(ht)** Näytä, että jos $f(z)$ on analyyttinen ja $\Re f(z)$ on vakio, niin $f(z)$ on vakio.
- 9) **(ht)** Anna yhtälön $e^{z^2} = 1$ kaikki ratkaisut. Piirrä muutama niistä kompleksitasoon.