



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 6

Harjoitukset viikolla 42, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

Huom! Ensimmäinen osatentti pidetään tiistaina 25.10. kello 16-20.

- 1) **(kt)** Ratkaise systeemi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -8y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

- 2) **(kt)** Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 5y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + 5y_2, \\ y_1(0) &= -3 \text{ ja} \\ y_2(0) &= 7. \end{cases}$$

- 3) **(kt)** (a) Laske funktion

$$e^{-t}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)$$

Laplace-muunnos.

- (b) Käänteismuunna

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s}{s^2 + s + \frac{1}{2}}.$$

- 4) **(ht)** Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -y_2 + \cos(t) - \sin(t) \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \cos(t) + \sin(t) \\ y_1(0) &= -1 \\ y_2(0) &= -6 \end{cases}.$$

- 5) **(ht)** Etsi seuraavien yhtälöiden kriittiset pisteet ja määritä niiden tyypit. Käytä hyväksesi vastaavaa systeemiä ja linearisointia.

(a) $y'' + 4y - 5y^3 + y^5 = 0$

(b) $y'' + \cos(y) = 0$

6) **(ht)** Määritä linearisoimalla systeemin

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x - y \sin(x) \end{cases}$$

stabiilisuus origossa.

7) **(ht)** (a) Laske funktion $(t+1)^2 e^t$ Laplace-muunnos.

(b) Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} k, & \text{kun } 1 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases},$$

missä $k > 0$ on vakio. Laske funktion f Laplace-muunnos.

8) **(ht)** (a) Käytä hyväksesi tietoa, että

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s),$$

ja Laplace-muunna $t^2 \sin(\omega t)$.

(b) Käytä lisäksi tietoa, että

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s},$$

ja Laplace-käänteismuunna

$$\ln \frac{s+a}{s+b}.$$

9) **(ht)** Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

alkuehdolla

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$