



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 5

Harjoitukset viikolla 41, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) (**kt**) Laske e^A , e^B , $e^A e^B$ ja e^{A+B} , kun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) (**kt**) Ratkaise Kreyszigin menetelmällä $\dot{y} = Ay$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 3) (**kt**) Määää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

kolmas rivi siten, että sen karakteristinen polynomi toteuttaa

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

- 4) (**ht**) Näytä, että $n \times n$ -matriisin A karakteristiselle polynomille $p(\lambda)$ pätee

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

missä λ_i on ominaisarvo.

Osoita tämän avulla, että $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ ja $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Vihje: Mieti, miten polynomin $p(\lambda)$ vakiotermi ja toiseksi korkeimman asteen termi muodostuvat.

- 5) **(ht)** Ratkaise alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 6y_1 + 9y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + 6y_2 \\ y_1(0) &= -3 \quad \text{jä} \\ y_2(0) &= -3. \end{cases}$$

Mikä on dynaaminen tyyppi?

- 6) **(ht)** Ratkaise matriisieksponentilla $\dot{y} = Ay$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mikä on dynaaminen tyyppi? Onko systeemi stabiili? Asymptoottisesti stabiili?

- 7) **(ht)** Millä parametrin k arvoilla origo on nielu differentiaaliyhtälösystemille $\dot{x} = Ax$, kun

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{jä}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

- 8) **(ht)** Ratkaise

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -5t^2 + 6t + 25 \\ -t^2 + 2t + 4 \end{pmatrix}$$

alkuehdolla

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 9) **(ht)** Ratkaise $\dot{x} = Ax$, kun

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{jä} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$