



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 4

Harjoitukset viikolla 40, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

1) (**kt**) Olkoon

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Laske e^A diagonalisoimalla A ensin.

b) Laske e^{At} , kun $t \in \mathbb{R}$.

2) (**kt**) Ortonormeeraa Gram-Schmidtin menetelmällä vektorit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3) (**kt**) Laske e^A kun A on

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) (**ht**) a) Miksi A ei voi koskaan olla similaarinen matriisin $A + I$ kanssa?

b) Etsi diagonaalinen M , jonka avulla voit osoittaa, että

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ovat similaariset.

5) **(ht)** Johda tulon derivoimissääntö $n \times n$ -matriisille $A(s)$ ja $B(s)$.

6) **(ht)** Laske J^{10} , A^{10} ja e^A , kun $A = MJM^{-1}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -16 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

7) **(ht)** Laske vektorinormia $\|\cdot\|_\infty$ käyttäen normit matriiseille

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

8) **(ht)** Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $y'' - yy' = 0$. Muunna se sijoituksella $u = y'$ differentiaaliyhtälösystemiksi. Ratkaise alkuperäinen yhtälö (C2:n tiedoilla). Johda siitä differentiaaliyhtälösystemin ratkaisu.

9) **(ht)** Etsi differentiaaliyhtälösystemille

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 \end{cases}$$

yleinen reaaliratkaisu. Käytä sekä matriisieksponenttimenetelmää että Kreysztzigin esittämää menetelmää.