



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 3

Harjoitukset viikolla 39, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) (**kt**) Lasken matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

inverssi. Mitä huomaat? Luokittele matriisi. Mitä se tekee $\mathbb{R}^3$:n vektorille? Laske ominaisarvot ja vektorit .

- 2) (**kt**) Vie neliömuoto $32x_1^2 - 60x_1x_2 + 7x_2^2 = -52$ pääakselimuotoon. Laske uudet kantavektorit ja identifioi neliömuodon tyyppi.

- 3) (**kt**) Diagonalisoi matriisi

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

- 4) (**ht**) Etsi ominaisvektorikanta ja diagonalisoi.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 5) (**ht**) Käyttäen diagonalisointia etsi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

neliöjuuri, siis matriisi R siten, että $R^2 = A$. Kuinka monta juurta näin sait? Tämä ongelma on vaikea ratkaista ilman diagonalisointia.

- 6) (**ht**) Etsi symmetrinen matriisi C siten, että

$$x^T C x = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - 5x_3^2.$$

- 7) **(ht)** a) Laske normit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_\infty$ vektoreille $(4, -3, -1, 5, -5)^T$ ja $(5, 4, 3, 3, 2, 1)^T$.
b) Näytä, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ pätee $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ ja $\|x\|_1/n \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Näiden epäyhtälöiden nojalla normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ sanotaan olevan ekvivalentteja.

- 8) **(ht)** Osoita, että jos vektorinormiksi valitaan $\sum_{i=1}^n |x_i|$, matriisinormille pätee

$$\|A\| = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}|.$$

- 9) **(ht)** Olkoon $A = uv^T$. Mikä on matriisin A rangi? Näytä, että u on matriisin A ominaisvektori ja laske sitä vastaava ominaisarvo. Mitkä ovat matriisin A muut ominaisarvot ja miksi?