



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 2

Harjoitukset viikolla 38, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

1) (**kt**) Laske

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} m & n & p \\ p & m & n \\ n & p & m \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

2) (**kt**) Etsi matriisin

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

ominaisarvoa $\lambda = 1$ vastaava ominaisvektori. Tämä voidaan tulkita myös matriisin määrämän nk. Markov-prosessin tasapainotilana.

3) (**kt**) Etsi matriisien

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -10 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -30 \\ -5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

kaikki ominaisarvot ja -vektorit

4) (**ht**) Onko matriisi

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

symmetrinen, vinosymmetrinen tai ortogonaalinen. Etsi ominaisarvot.

- 5) (ht) Onko matriisi

$$\text{a) } \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 4i \end{pmatrix}$$

hermiittinen, vinohermiittinen tai unitaarinen. Etsi ominaisarvot.

- 6) (ht) Olkoon matriisilla A ominaisarvo λ ja sitä vastaava ominaisvektori x .

- a) Näytä, että matriisilla A^k on ominaisarvo λ^k .
b) Näytä, että jos A on kääntyvä, niin matriisilla A^{-1} on ominaisarvo $1/\lambda$.
c) Jos $p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0$ on polynomi, niin matriisilla $p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$ on ominaisarvo $p(\lambda)$.

- 7) (ht) Laske

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Näytä, että $\det(\kappa A) = \kappa^n \det(A)$, kun $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Siis yleisesti $\det(\kappa A) \neq \kappa \det(A)$

- 8) (ht) Tutki matriiseja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

missä tyhjiin sijoitetaan alkiot

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Olkoot nämä 3×3 -matriisit nimeltään $K_x(\phi)$, $K_y(\phi)$ ja $K_z(\phi)$. Mitä ne tekevät avaruudessa $\mathbb{R}^3$? Kommutoivatko ne keskenään? Ovatko ne ortogonaalisia? Laske determinantit. Onko $K_x(\phi)K_y(\phi)K_z(\phi)(1,0,0)^T$ mielivaltainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikkövektori sopivilla arvoilla ϕ_x, ϕ_y ja ϕ_z ?

- 9) (ht) Millä vakioiden arvoilla matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

rankki on 2?