



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 11

Harjoitukset viikolla 49, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

Tiistaina 6.12. eli itsenäisyyspäivänä ei pidetä laskuharjoituksia. Tiistain laskuharjoitukset

korvaava tilaisuus järjestetään **maanantaina 5.12. A-salissa kello 13.15-14.45**. Kaikki halukkaat ovat tervetulleita sinne!

- 1) **(kt)** (a) Etsi seuraavien funktioiden pienin positiivinen jakso p .

$$\cos(nx), \sin(nx), \cos\left(\frac{2\pi x}{k}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{k}\right), \cos\left(\frac{2\pi nx}{k}\right), \sin\left(\frac{2\pi nx}{k}\right)$$

- (b) Olkoon $f(x)$ muuttujan x suhteen p -jaksollinen. Näytä, että $f(ax)$, $a \neq 0$, on muuttujan x suhteen p/a -jaksollinen, ja että $f(x/b)$, $b \neq 0$, on muuttujan x suhteen bp -jaksollinen. Tarkasta nämä tulokset, kun $f(x) = \cos(x)$ ja $a = b = 2$.

- 2) **(kt)** Etsi 2π -jaksollisen funktion $f(x) = x + |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ Fourier-sarja ja piirrä kyseisen sarjan kolmen ensimmäisen osasumman kuvaajat.

- 3) **(kt)** Etsi 2π -jaksollisen funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \text{kun } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

Fourier-sarja ja piirrä kyseisen sarjan kolmen ensimmäisen osasumman kuvaajat.

- 4) **(ht)** Laske parilliset ja parittomat osat ja hahmottele ne

$$\text{a) } x + |x| \quad \text{b) } e^x \quad \text{c) } x \cos x$$

- 5) **(ht)** Laske 2π -jaksolliseksi oletetun funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{jos } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Fourier-sarja ja piirrä sarjan kolme ensimmäistä osasummaa.

Mikä on funktion f pariton ja mikä parillinen osa? Mitkä ovat Fourierin sini- ja kosinikehitelmät?

- 6) **(ht)** Etsi $2L = 2$ -jaksollisen funktion $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$ Fourier-sarja ja piirrä kyseisen sarjan kolmen ensimmäisen osasumman kuvaajat.

- 7) **(ht)** Onko funktio

$$f(x) \begin{cases} -2x, & \text{kun } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{kun } 0 < x < \pi \end{cases}$$

parillinen vai pariton? Laske Fourier-sarja. Hahmottele funktion kuvaaja ja joitakin Fourier-sarjan osasummia.

- 8) **(ht)** Käytä avuksesi funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $-\pi < x < \pi$, Fourier-sarjaa ja näytä, että $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$.

- 9) **(ht)** Näytä Parsevalin kaavan avulla, että $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^6 dx = \frac{5\pi}{8}$.