



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 10

Harjoitukset viikolla 48, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) (**kt**)
 - a) Laske integraali $\oint_C e^z/z dz$, missä C muodostuu ympyröiden $|z| = 2$ (vastapäivään) ja $|z| = 1$ (myötäpäivään) kehistä.
 - b) Laske $\oint_C (\cos(\pi z))/z^{2n} dz$, missä n on positiivinen kokonaisluku ja C on yksikköympyrän kehä vastapäivään kierrettynä.
- 2) (**kt**) Näytä, että geometrinen sarja hajaantuu yksikköympyrän kehän $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ jokaisessa pisteessä, jossa θ on π :n rationaalinen moninkerta eli $\theta = p\pi/q$, missä p ja q ovat kokonaislukuja.
- 3) (**kt**) Laske 1-puolinen Z -muunnos jonoille a) $x_n = n$, b) $x_n = b^n n^2$ ja c) näytä yleisesti, että $Z[\{b^n x_n\}] = X(z/b)$, kun $X(z) = Z(\{x_n\})$.
- 4) (**ht**) Suppenevatko sarjat?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 + i}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- 5) (**ht**) Mikä on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} (z + 2 - i)^n / (1 + i)^n$ kehityspiste ja suppenemissäde?
- 6) (**ht**) Laske funktion $1/(1+z)^m$ MacLaurinin sarjan neljä ensimmäistä termiä binomikaavalla (Kreyszig s. 757).
- 7) (**ht**) Laske funktion $1/(z(z-1))$ Laurent-sarja origo kehityspisteenä ja anna suppenemisaralue.
- 8) (**ht**) Integroi $\oint_C (\ln z)/(z-2)^2 dz$, missä C on ympyrän $|z-3| = 2$ kehä vastapäivään kierrettynä.
- 9) (**ht**) Osoita, että 1-puolinen Z -muunnos toteuttaa yhtälön

$$Z[\{n^k x_n\}] = (-1)^k \left(z \frac{d}{dz} \right)^k X(z)$$