

$$y''' + y - 4y^2 = 0.$$

1.

Uusi muuttaja $z = y'$. Saadaan systeemi

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z \\ 4y^2 - y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f(y,z) \\ g(y,z) \end{pmatrix}.$$

Kriittiset pisteet: $f(y,z)=0 \Rightarrow z=0$

$$g(y,z)=0 \Rightarrow y=0 \text{ tai } y=\frac{1}{4}.$$

Linearisoidaan siis systeemi kriittisten pisteiden $(0,0)^T$ ja $(\frac{1}{4},0)^T$ ympäristössä.

Lasketaan valmiiksi $f_y(y,z)=0$; $f_z(y,z)=1$;
 $g_y(y,z)=8y-1$; $g_z(y,z)=0$.

$(0,0)^T$: linearisoitu systeemi

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_y(0,0) & f_z(0,0) \\ g_y(0,0) & g_z(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

A:n omat arvot: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i. \text{ Tämä on } \underline{\text{keskus}}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}, 0 \end{pmatrix}^T: \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y(\frac{1}{4}, 0) & f_z(\frac{1}{4}, 0) \\ g_y(\frac{1}{4}, 0) & g_z(\frac{1}{4}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

omavarvot $\lambda = \pm 1$. Sattula.

Kreyszig 9. painos lause 1 s. 152:
 pisteen $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}, 0 \end{pmatrix}^T$ tyyppi on myös allenkärsäisellä systeemillä sattula. Pisteen $(0,0)^T$ tyyppi lineaarisella systeemillä on saman lauseen perusteella keskus tai spiraali (joka tapauksessa stabiili).

$$(*) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + \sin t \\ 4y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.$$

- homogeenisen ongelman yleinen ratkaisu.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad A\text{in om.arvot:}$$

$$(1-\lambda)^2 = 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm 2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$\text{om. vektorit: } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{saadaan } y_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Epähomogeenisen yhtälön erityisratkaisu:

$$\text{yrite: } y_1 = a \cos t + b \sin t, \quad y_2 = c \cos t + d \sin t$$

sijoitetaan (*)-een:

$$-a \sin t + b \cos t = (a+c) \cos t + (b+d+1) \sin t$$

$$-c \sin t + d \cos t = (4a+c) \cos t + (4b+d) \sin t$$

$$\rightarrow \begin{cases} -a = b+d+1 \\ b = a+c \\ -c = 4b+d \\ d = 4a+c \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2.

Siispä yleinen ratkaisu on

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \cos t + \frac{1}{10} \sin t \\ \frac{2}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t \end{pmatrix}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 - 2y_2^2 \\ y_1 - 2y_1^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f(y_1, y_2) \\ g(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \text{ kriittiset pisteet:}$$

$$y_1 - 2y_1^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \text{ tai } y_1 = \frac{1}{2}.$$

Kriittiset pisteet ovat näin ollen

$$(0, 0)^T, (0, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, 0)^T, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T.$$

$$f_{y_1} = 0, \quad f_{y_2} = 1 - 4y_2$$

$$g_{y_1} = 1 - 4y_1, \quad g_{y_2} = 0.$$

$(0, 0)^T$: Linearisoitu systeemi

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y. \text{ Om. arvot } \pm 1 \Rightarrow \underline{\text{sattula}}$$

$(0, \frac{1}{2})^T$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, om. arvot $\pm i \Rightarrow$ keskus.

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right)^T: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ om. arvot } \pm i \Rightarrow \text{keskus} \quad 3.$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ om. arvot } \pm 1 \Rightarrow \text{sattula.}$$

Kreyszig 9 s. 152:

$(0,0)^T$ ja $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ sattulapistettä.
allomp. systeemille,

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)^T, \left(0, \frac{1}{2}\right)^T$ joko keskukieria tai
spitaalipisteitä.