# C3-II / HARJOITUS 3

**A1** $y'' + y = r(t) = t(u(t) - u(t-1)) \quad \| \mathcal{L}(\cdot)$

$$s^2 Y(s) - \underbrace{s y(0) - y'(0)}_{0} + Y(s) = \mathcal{L}\left(t u(t) - (t+1-1) u(t-1)\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-s} \mathcal{L}(t+1)$$

$$Y(s)(s^2+1) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2+1)} - e^{-s}\frac{1}{s(s^2+1)}$$

Lasketaan $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)$

$$= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \sin \tau \, d\tau = 1 - \cos t =: f(t)$$

ja edelleen

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1}\right) = \int_0^t 1 - \cos \tau \, d\tau$$

$$= \Big/_0^t \{\tau - \sin \tau\} = t - \sin t =: g(t).$$

Siirtolause: $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = f(t-a)u(t-a)$,

jolla $\mathcal{L}^{-1}(Y) = g(t) - g(t-1)u(t-1) - f(t-1)u(t-1)$

$$= t - \sin t - u(t-1)\left(t-1 - \sin(t-1) + 1 - \cos(t-1)\right)$$

$$= \underline{t - \sin t - u(t-1)\left(t - \sin(t-1) - \cos(t-1)\right)}$$

## A2

$f$ on $p$-jaksollinen $\iff f(t+mp)=f(t),\ m\in\mathbb{Z}$.

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$=\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt+\int_p^{2p}e^{-st}f(t)\,dt+\int_{2p}^{3p}e^{-st}f(t)\,dt+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{np}^{(n+1)p}e^{-st}f(t)\,dt\right\}.$$

Tehdään kuhunkin integraaliin muuttujanvaihto

$$\tau=t-np,\quad dt=d\tau,\quad t=\tau+np$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^p e^{-s(\tau+np)}f(\tau+np)\,d\tau\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-snp}\int_0^p e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau=\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-sp}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt,$$ olettaen että $s>0$.

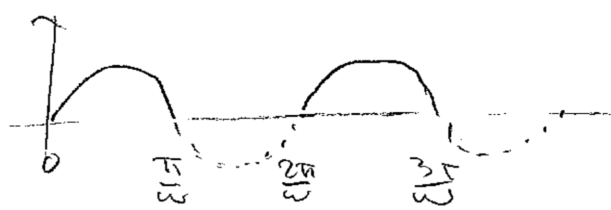
(muunnoksen konvergenssi edellyttää tämän muutenkin.)

$\square$

---

Olkoon nyt $f(t)=\max\{\sin\omega t,0\}$,

jolloin $p=\frac{2\pi}{\omega}$.



**A2** .. [illegible]

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{2\pi/\omega} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \Big/_0^{\pi/\omega} -\frac{\cos\omega t}{\omega}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\overbrace{\cos\pi}^{-1}}{\omega}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}$$

**A3** $y'' + 2y' + 5y = 25t - 100\,\delta(t-\pi) \;\Big\|\; \mathcal{L}(\cdot)$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{-2} - \underbrace{y'(0)}_{5} + 2\big(sY(s) - \overbrace{y(0)}^{-2}\big) + 5Y(s)$$

$$= \frac{25}{s^2} - 100\,e^{-s\pi}$$

$$Y(s)(s^2+2s+5) = \frac{25}{s^2} - 100\,e^{-\pi s} - 2s + 5 - 4$$

$$= \frac{25}{s^2} - 100\,e^{-\pi s} - 2s + 1$$

$$Y(s) = -\frac{100\,e^{-\pi s}}{s^2+2s+5} + \frac{25 - 2s^3 + s^2}{s^2(s^2+2s+5)}$$

$\longrightarrow$

## A3...

peliliike: jaetaan jälkimmäisen termin polynomit keskenään: (ts. lähdetään laskemaan osamurtokehitelmää)

$$
\begin{array}{r|l}
 & -2s + 5 \\
\hline
s^2+2s+5 & -2s^3 + s^2 + 25 \\
 & -2s^3 - 4s^2 - 10s \\
\hline
 & 0 \quad 5s^2 + 10s + 25 \\
 & 5s^2 + 10s + 25 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{-100 e^{-\pi s}}{s^2+2s+5} + \underbrace{\frac{1}{s^2}(-2s+5)}_{= \frac{5}{s^2} - \frac{2}{s} = 5\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(2)}$$

Tarvitaan vielä

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\sin 2t \quad \left(\text{vrt. } \mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t)\right)$$

t-shiftauslausetta käyttämällä saadaan

$$y(t) = -\frac{100}{2}\cdot e^{-(t-\pi)}\sin(\overbrace{2(t-\pi)}^{2t-2\pi})\,u(t-\pi) + 5t - 2$$

$$= \underline{\underline{5t - 2 - 50\cdot u(t-\pi)\,e^{\pi-t}\sin 2t}}$$

L7 Funktioiden $f$ ja $g$ konvoluutio on

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

$$= (g*f)(t) = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau .$$

a) $(1 * \cos\omega t)(t) = (\cos\omega t * 1)(t)$

$$= \int_0^t \cos\omega\tau\,d\tau = \frac{\sin\omega t}{\omega}$$

b) Käytetään konvoluutiolausetta:

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g) .$$

Nyt $\mathcal{L}(e^{kt} * e^{-kt}) = \mathcal{L}(e^{kt})\mathcal{L}(e^{-kt})$

$$= \frac{1}{s-k} \cdot \frac{1}{s+k} = \frac{1}{s^2-k^2}$$

$$= \frac{1}{k}\,\mathcal{L}(\sinh(kt))$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e^{kt} * e^{-kt} = \frac{1}{k}\sinh kt}}$$

2. Yleisesti pätee $\mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = -t\,g(t)$.

Nyt $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+16)^2} = \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s^2+16}\right)$,

edellisen perusteella $\mathcal{L}^{-1}(F) = \dfrac{t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+16}\right)$

$$= \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t = \underline{\underline{\frac{t}{8}\sin 4t}}$$

$\underline{L3}$ $\quad y'' + 4y = \sin 3t, \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad \| \mathcal{L}(\cdot)$

$$s^2 Y(s) - \underbrace{s y(0) - y'(0)}_{0} + 4Y(s) = \mathcal{L}(\sin 3t)$$

$$Y(s)(s^2+4) = \mathcal{L}(\sin 3t)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}(\sin 3t) \cdot \frac{1}{s^2+4}$$

$$= \mathcal{L}(\sin 3t) \cdot \mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)$$

Konvoluutiolause nojalla

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2t * \sin 3t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \sin 3\tau \sin(2t - 2\tau)\, d\tau$$

Trigonometriaa: $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(-\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t -\cos(2t+\tau) + \cos(5\tau - 2t)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \Big/_0^t -\sin(2t+\tau) + \Big/_0^t \frac{\sin(5\tau - 2t)}{5} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ -\sin 3t + \sin 2t + \frac{1}{5}\left(\sin 3t - \overbrace{\sin(-2t)}^{-\sin 2t}\right) \right\}$$

$$= \frac{3\sin 2t - 2\sin 3t}{10}$$

L4

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ karakteristinen polynomi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$$

$$a - \lambda = \pm ib$$

$$\lambda = a \pm ib$$

Ominaisvektorit: Olet. ensin $b \neq 0$.

$\lambda_1 = a + ib$

$$(A - \lambda_1 b)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-(a+ib))x + by = 0$$

$$-ix + y = 0$$

Valitaan $x = 1 \Rightarrow y = ix$
$= i$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = a - ib$

$$(A - \lambda_2 b)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-(a-ib))x + by = 0$$

$$ix + y = 0$$

Valitaan taas $x = 1 \Rightarrow y = -i$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

L4...

Jos $b = 0$, on ainoa
ominaisarvo $\lambda = a$,
ja niitä vastaavat ominaisvektorit
$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $$A = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 5 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & -8 \\ 5 & +4 & 7-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= (13-\lambda)\left((7-\lambda)^2 + 32\right) + 5\left(-40 - 2(7-\lambda)\right)$$
$$+ 2\left(8 - 5(7-\lambda)\right).$$

Merkitään $7 - \lambda = \tilde{\lambda}$, jolloin

$$\det(A - \lambda I) = (\tilde{\lambda} + 6)(\tilde{\lambda}^2 + 32) - 200 - 10\tilde{\lambda} + 16 - 10\tilde{\lambda}$$
$$= \tilde{\lambda}^3 + 6\tilde{\lambda}^2 - 12\tilde{\lambda} + 8$$
$$= (\tilde{\lambda} + 2)^3 \quad (!)$$
$$\Rightarrow \tilde{\lambda} = -2 \Rightarrow \lambda = 9$$
(ainoa ominaisarvo)

# L4...

## Ominaisvektori:

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -8 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Etsitään yleinen ratkaisu Gaussin eliminaatiolla...

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 8 \\ 0 & -9/4 & -9/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & -9/2 & -9 \\ 0 & -9/4 & -9/2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & -9/2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x + 5y + 2z = 0 \\ -9y - 18z = 0 \end{cases}$$

Valitaan $y = 1 \Rightarrow z = -\frac{y}{2} = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{1}{4}(-5y - 2z) = \frac{1}{4}(-5+1) = -1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

(Voitaisiin vielä normeerata, mutta tätä ei tehdä kirjanrakkaan)

L5 Matriisilla $A$ on ominaisarvo

$\lambda = 0$ jos ja vain jos

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 0) = \det(A) = 0.$$

Toisaalta $A$ on kääntyvä ~~termillee~~ silloin, kun $\det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow$ □

Olk. nyt $A^{-1}$ olemassa ja

$Ax = \lambda_i x \quad | A^{-1}(\cdot)$

$x = \lambda_i A^{-1} x$

$\Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda_i} x$, eli

$\frac{1}{\lambda_i}$ on $A^{-1}$:n ominaisarvo. □

L6 Tarkastellaan alaa $j$.

Ala $j$ maksaa alan $k$ tuotteista $p_k a_{jk}$. Tällöin kokonaiskulut ovat $\sum_k p_k a_{jk}$. Tasapainotilassa $p_j = \sum_k a_{jk} p_k$ kaikilla $j$,

eli $Ap = p$.

Yhtälön ratkaisu on ominaisarvoa 1 vastaava ominaisvektori / vektorit.

L6...

Etsitään siis (yleinen) ratkaisu yhtälölle $(A - I)p = 0$

$$A - I = \begin{pmatrix} -0{,}9 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9/10 & 1/2 & 0 \\ 4/5 & -1 & 2/5 \\ 1/10 & 1/2 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Gauss

$$\begin{pmatrix} -9/10 & 1/2 & 0 \\ 4/5 & -1 & 2/5 \\ 0 & 5/9 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9/10 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/9 & 2/5 \\ 0 & 5/9 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9/10 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/9 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -\frac{9}{10}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = 0$

$-\frac{5}{9}p_2 + \frac{2}{5}p_3 = 0$

Olk. $p_1 = \alpha$ eli

$\Rightarrow p_2 = \frac{9}{5}\alpha$ ; $p_3 = \frac{25}{18}p_2 = \frac{5}{2}\alpha$

$\Rightarrow (p_1, p_2, p_3)^T = \alpha(1, \frac{9}{5}, \frac{5}{2}) = \tilde{\alpha}\underline{(10, 18, 25)}$

## L6...

Summa $\sum_j a_{jk}$ on kaikille aloille menevä tuotanto yhteensä.

Oletetaan perusteella tämän on oltava koko tuotanto, eli

$$\sum_j a_{jk} = 1.$$

Olkoon nyt matriisi

$$V = A - I = \begin{bmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ - v_3 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{bmatrix}.$$

Edellisestä nähdään, että $\sum_j v_{jk} = \sum_j a_{jk} - 1$

$= 0$ kaikille $k$.

Tämä merkitsee, että rivivektorien summa $\sum_j v_j = 0$.

Tällöin $V$:n rivit eivät ole lineaarisesti riippumattomat, joten

$$\det(V) = 0$$ ja

$A$:lla on ominaisarvo $1$. $\square$