



Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II
Eloranta / Haimi
Tietokoneharjoitustehtävät

48

Mathematica-harjoitukset

Käynnistä Mathematica komennolla `mathematica52`.

Tehtävä 1: Olkoot

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Markovin ketjun siirtymätodennäköisyysmatriiseja P . Nämä ovat stokastisia matriiseja (eli rivisummat=1, ks. Kreyszig 9. painos s. 285, 341). Markovin ketjun *tasapainotila* t on stokastinen vektori (alkiot ei-negatiivisia, alkiosumma = 1), jolla on ominaisuus

$$tP = t$$

Mikäli ketju on *ergodinen*, suppenee ketju tasapainotilaan mistä tahansa alkutilasta a lähtien. Tämä tarkoittaa sitä, että $aP^n \rightarrow t$, kun $n \rightarrow \infty$. Valitse mielivaltainen stokastinen vektori alkutilaksi ja laske sitten esimerkiksi käskyllä

`MatrixForm[a.MatrixPower[P, n]]`

tila hetkellä n . Suppeneeko prosessi kohti tasapainotilaa? Testaa arvauksesi sijoittamalla se tasapainoehdon vasemmalle puolelle.

Tehtävä 2: Olkoon Markovin siirtymämatriisi

$$\begin{pmatrix} q_1 & 1 - q_1 \\ q_2 & 1 - q_2 \end{pmatrix}.$$

Laske tasapainotila `eigensystem`-rutiinilla. Sijoita tulokseen esim. arvoja

a) $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$ (kolikonheitto)

b) $q_1 = \frac{3}{4}, q_2 = \frac{1}{4}$

c) $q_1 = \frac{3}{4}, q_2 = \frac{3}{4}$.

Mieti, vastaavatko tasapainotilat intuitiotasi siitä, kumpaa tilaa ketju suosii?

Tehtävä 3: Valitse mieleisesi reaalinen 2×2 - 4×4 -matriisi a . Tutki ensin komennon `Max[Apply[Plus, Abs[a]]]` sisältämiä funktioita yksinkertaisilla listoilla ja laske sitten ko. arvo. Mikä matriisinormeista se on? Entä muiden matriisin a normien (rivi, sarake, Frobenius, ks. Kreyszig 9 s. 849) laskeminen? Huomaa, että a^2 ei ole matriisin neliö, vaan - juuri sopivasti -

matriisi, jonka alkio on neliöity!

Laske sitten lauseketta $\|a^n\|^{1/n}$ käyttäen komentoa `MatrixPower[a, n]`, n . juurta ja em. normeja. Konvergoiko?

Laske matriisin a spektri komennolla `Eigenvalues`. Mitä huomaat? Raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ on matriisin a *spektraalinormi*.

Jos matriisin a^n alkio ovat kovin suuria suurilla n , voit katsella matriisia esimerkiksi komennolla `MatrixForm[NumberForm[N[MatrixPower[a, n]], 5]]`.

Keksitkö, miksi raja-arvo näyttää samalta matriisinormista riippumatta? Kokeile useilla eri matriiseilla, jolloin näet, miten matriisin a^n alkioiden suhteet muuttuvat.

Tehtävä 4: Mathematican komento `NDSolve` ratkaisee numeerisesti differentiaaliyhtälöitä ja myös systeemejä. Itse ratkaisu tapahtuu esimerkiksi koodilla

```
Sol=NDSolve[{x'[t]==-0.5x[t]-y[t], y'[t]==x[t]-y[t],
             x[0]==3, y[0]==1}, {x,y}, {t,10}].
```

Se tulostetaan esimerkiksi kirjoittamalla

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.Sol], {t,0,10}].
```

(Kuvaa on syytä taas skaalata, jotta mittasuhteet ovat oikeat.)

Tutki systeemejä

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$$

eri alkuarvoilla ja muutellen parametrin t sallittua aluetta. Keksitkö, miten saat useamman käyrän samaan kuvaan?

Laskemalla ominaisarvot voit päätellä ratkaisujen ”suunnan” (= parametrin t kasvusuunnan). Mitkä ovat systeemien kvalitatiiviset tyypit?

Tutki myös systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

vaihtamalla parametriväliä, kun x ja y ovat lähellä nollaa.

Tehtävä 5 (jos ehtii): (a) Tutkitaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x^2 - y^2)x + 4y \\ \dot{y} = -4x + (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}.$$

Määrittele ensin vektori

```
f[x_, y_] := {{(1-x^2-y^2)x+4y}, {-4x+(1-x^2-y^2)y}}.
```

Derivoi se alkioittain (`D[f[x, y][[1]], x]` jne.) ja muodosta näistä 2×2 -matriisi a . Laske mikä matriisi a on origossa. Käytä esimerkiksi komentoa `a /. {x->0, y->0}`. Mitä tulos merkitsee?

Käyttäen komentoa `NDSolve` tulosta systeemin ratkaisuja. Mallia voit ottaa edellisestä tehtävästä. Käytä esimerkiksi alkutiloja $(0, 0)$, $(0, 0.1)$, $(0, 0.5)$ ja $(0, 10)$. Skaalaa akselit tarpeen mukaan. Mitä havaitset? Entä alkutilasta $(0, 1)$? Olisitko voinut arvata tulokset suoraan yhtälöstä?

(b) Van der Polin systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 + y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

voidaan analysoida edellisen esimerkin tapaan, mutta systeemi on kvalitatiivisesti hankalampi.

Linearisoi systeemi jälleen origossa ja tutki stabiilisuutta (ominaisarvoista). Laske sitten ratkaisukäyrät esimerkiksi alkutiloista $(0, 0)$, $(0, 0.1)$, $(0, 1.25)$ ja $(0, 2)$ lähtien. Skaalaa akselit, että näet *rajasyklin* oikean muodon. Esimerkiksi $t \in [0, 50]$ toimii aika hyvin ratkaisuvälinä.