



Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II
Eloranta / Haimi
Tietokoneharjoitustehtävät

46

Mathematica-harjoitukset

HUOM! Käyttäkää Mathematican versiota 5.2. (avautaa komennolla `mathematica52`).

Tehtävä 1: `LaplaceTransform` ja `InverseLaplaceTransform` -rutiineilla voit laskea Laplace-muunnoksia ja käänteismuunnoksia. Katso niiden syntaksi `Helpistä`. Kokeile muuntaa e^{at} , t^m , jne. Selvitä tulostuksen Gamma-funktio, se on kertoman yleistys. Tarkista erityisesti, että $\text{Gamma}[n] = (n-1)!$ (tee tämä osittaisintegroimalla). Huomaa, että Mathematica osaa Laplace-muuntaa esim. hankalan funktion $1/\sqrt{t}$ ja tuntee myös delta-funktion (ks. `DiracDelta` `Helpistä`)

Tehtävä 2: Määritellään matriisi

$$A = [\alpha_{ij}] : \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } j = i + 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Generoi matriisi komennoilla `Table` ja `If`. Tulosta komennolla `MatrixForm`, kunhan olet ensin varmistunut tuloksesta. Dimensioksi voit valita esimerkiksi 7×7 . Tutki käskyllä `MatrixPower`, miten A^n käyttäytyy. Tällainen matriisi on *nilpotentti*.

Tehtävä 3: Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Miten generoit sen komennoilla `Table` ja `If` antamatta kaikkia alkioita eksplisiittisesti? Laske spektri ja ominaisvektorit. Laske ominaisvarauudet komennolla

`NullSpace[A-lambda*IdentityMatrix[5]]`

Täsmääkö edelliseen? Tee sama analyysi matriisille

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 4: Fibonaccin jono määritellään kaavalla $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geq 2$, $x_0 = x_1 = 1$. Laske muutama ensimmäinen termi. Jos määritellään $x^{(n)} = (x_n, x_{n-1})^T$, niin mille matriisille A pätee $x^{(n)} = Ax^{(n-1)}$? Kyseessä on diskreettiaikainen dynaaminen systeemi. Laske `MatrixPower`-komennolla sadas Fibonaccin luku. Laske A :n spektri. Jos $\lambda_1 > \lambda_2$, niin tutki jonon A^n/λ_1^n käyttäytymistä. Mitä voit päätellä Fibonaccin lukujen kasvuvauhdista?

- Tehtävä 5:** a) Generoi kaikki neljän symbolin permutaatiot eli 4×4 -permutaatiomatriisien lista. Mathematican `Permutations`-komento on kätevä funktio tähän tarkoitukseen. Tietoa funktion käytöstä saat komennolla `?Permutations`. Kuinka monta alkia listassa on? Miten se liittyy lukuun $4!$? Laske elementtien inverssit ja tulot. Mitä huomaat? Alkiot muodostavat esityksen ryhmälle S_4 . Laske vielä alkioden determinantit. Mitä huomaat?
- b) Mathematican paketissa `DiscreteMath`Combinatorica`` on komento `RandomPermutation`. Tutki Helpin avulla, mitä se tekee. Ohjelmoi sitten (yksirivinen) koodi, joka antaa satunnaisen 52×52 -permutaatiomatriisin. Huomaa, että tämänkokoisia permutaatiomatriiseja on suunnaton määrä, etkä voisi millään tuottaa kaikkia permutaatioita (ohjelma todennäköisesti kaatuisi!).