



Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II
Eloranta / Haimi
Harjoitustehtävät

49

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U351 vastapäätä olevaan palautuskaappiin ke klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdistle. Palautettavaan papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

1 Kotitehtävät

Kotitehtävä 1: Ratkaise systeemi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -2y_2 \\ \dot{y}_2 &= 2y_1 \end{cases}$$

sekä Kreyszigin menetelmällä että matriisieksponentilla.

Kotitehtävä 2: Millä k :n arvoilla origo on nielu systeemille $\dot{x} = Ax$, jossa

(a) $A = \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}?$

Kotitehtävä 3: Alkuhetkellä tankissa $T1$ on 400 litraa vettä, johon on liuotettuna 100kg suolaa. Myös tankissa $T2$ on alkuhetkellä 400 litraa vettä, mutta siihen on liuotettuna 40kg suolaa. Tankista $T1$ virtaa vettä tankkiin $T2$ 64 litran minuuttivauhdilla ja tankista $T2$ tankkiin $T1$ 16 litran minuuttivauhdilla. Lisäksi systeemin ulkopuolelta tankkiin $T1$ virtaa makeaa vettä 48 litran minuuttivauhdilla ja tankin $T2$ kautta virtaa vettä pois systeemistä samalla 48 litran minuuttivauhdilla. Kummankin tankin suolavesiseosta pidetään "tasaisena" sekoittamalla. Laske kummankin tankin suolamäärät ajan funktiona.

2 Laskuharjoitukset

Tehtävä 1: Etsi systeemin $\dot{y} = Ay$ yleinen ratkaisu, missä $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$. Mikä on systeemin dynaaminen tyyppi?

Tehtävä 2: Osoita, että $n \times n$ -matriisille A pätee, että

(a) karakteristisen polynomin vakiotermi on $\det A$

(b) karakteristisen polynomin toiseksi korkeinta astetta oleva termin kerroin on $\text{tr} A$.

Tehtävä 3: Jos origo on keskus systeemille $\dot{y} = Ay$, mikä on origon tyyppi systeemille $\dot{y} = \tilde{A}y$, missä $\tilde{A} = A + kI$ reaaliluvulle $k \neq 0$.

Tehtävä 4: Etsi systeemin $\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} t \\ -3t \end{pmatrix}$ yleinen ratkaisu.

Tehtävä 5: Ratkaise systeemi $\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 20 \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Tehtävä 6: Etsi systeemin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y_1 + y_2 + y_2^2 \\ -y_1 - y_2 \end{pmatrix}$ kriittiset pisteet ja selvitä niiden tyyppi linearisoimalla.