



Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II
Eloranta / Haimi
Harjoitustehtävät

47

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U345 vastapäätä olevaan lokerikkoon ke klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdille. Palautettaviin papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

1 Kotitehtävät

Kotitehtävä 1: Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$$

määräämän Markovin ketjun stationääriset tilat.

Kotitehtävä 2: Näytä, että

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

on ortogonaalinen matriisi. Kerro sillä vektori $(\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ ja tulkitse tulos: mitä H tekee geometrisesti? Laske myös determinantti, mitä huomaat? Vertaa kiertomatriisin $K(\theta)$ determinanttiiin (ks. luennot tai Kreysgiz 9. painos 8.3 tehtävä 12)

Kotitehtävä 3: Vie neliömuoto $4x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2 = 10$ pääakselimuotoon. Määritä uudet kantavektorit ja identifioi ratkaisukäyrä.

2 Laskuharjoitukset

Tehtävä 1: Onko matriisi

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

symmetrinen, vinosymmetrinen tai ortogonaalinen? Laske $A(\theta)$:n ominaisarvot? Mitä A tekee geometrisesti?

Tehtävä 2: Etsi matriisin $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ määräämä ominaisvektorikanta ja diagonalisoi A .

Tehtävä 3: Etsi matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -15 \\ -18 & 39 & 9 \\ -24 & 40 & -15 \end{pmatrix}$ määräämä ominaisvektorikanta ja diagonalisoi A .

Tehtävä 4: Onko annettu joukko (tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla) vektoriavaruus? Jos on, määritä sen dimensio ja etsi jokin kanta.

(a) Kaikkien symmetristen 3×3 -matriisien joukko.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \right\}$.

Tehtävä 5: Olkoot

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske similariteettimuunnos $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Laske $\mathbf{A}$:n ja $\hat{\mathbf{A}}$:n ominaisarvot ja totea, että ne ovat samat. Etsi $\hat{\mathbf{A}}$:n ominaisvektorit $\mathbf{y}$ ja totea, että vektorit $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ ovat $\mathbf{A}$:n ominaisvektorit.

Tehtävä 6: (a) Laske normit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_\infty$ vektoreille $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}^T$ ja $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

(b) Näytä, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ pätee

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$$

ja

$$\frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$