



Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II
Eloranta / Haimi
Harjoitustehtävät

46

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U345 vastapäätä olevaan lokerikkoon ke klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdille. Palautettaviin papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

1 Kotitehtävät

Kotitehtävä 1: Ratkaise tehtävä $y''(t) + y(t) = r(t)$ ehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$. Tässä $r(t) = t$ kun $0 < t < 1$ ja $r(t) = 0$ kun $t \geq 1$.

Kotitehtävä 2: Olkoon $f : [0, \infty)$ paloittain jatkuva p -periodinen funktio. Osoita, että

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt.$$

Laske tätä käyttäen funktion $f(t) = \max\{\sin(\omega t), 0\}$ Laplace-muunnos.

Kotitehtävä 3: Ratkaise tehtävä $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 25t - 100\delta(t - \pi)$ ehdoilla $y(0) = -2$ ja $y'(0) = 5$.

2 Laskuharjoitukset

Tehtävä 1: Laske

(a) $1 * \cos \omega t$

(b) $e^{kt} * e^{-kt}$, kun k on reaalityyppinen vakio.

Tehtävä 2: Käänteismuunna $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 16)^2}$.

Tehtävä 3: Ratkaise tehtävä $y'' + 4y = \sin 3t$, $y(0) = y'(0) = 0$ käyttäen konvoluutiolausetta (ks. Kreyszig 9. painos s. 253).

Tehtävä 4: Laske ominaisarvot ja -vektorit matriiseille

(a) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Tehtävä 5: Osoita, että matriisi A on kääntyvä jos ja vain jos mikään ominaisarvoista $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ei ole nolla. Osoita myös, että tällöin A :n käänteismatriisin ominaisarvot ovat $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$.

Tehtävä 6: (Kr8 s.380 teht. 13 ja 14) Oletetaan, että kolme teollisuudenalaa ovat sidoksissa toisiinsa siten, että ne käyttävät toistensa tuotteet seuraavan kulutusmatriisin mukaisesti

$$\mathbf{A} = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Tässä a_{jk} on teollisuudenalan j käyttämä osuus teollisuudenalan k tuotannosta. Olkoon $p_j > 0$ hinta, jonka teollisuudenala j perii koko tuotannostaan yhteensä. Tehtävänä on määrätä hinnat siten, että jokaisella teollisuudenalalla tulot ovat samat kuin menot. Osoita, että tämä johtaa yhtälöön $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$, missä $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T$ ja etsi ratkaisu.

Osoita vielä, että ylläolevan kaltaisen kulutusmatriisin sarakesummat ovat aina 1 ja että luku 1 on myös sen ominaisarvo.