Leikki metrisessä avaruudessa kannustaa luovuuteen

Riikka Korte ja Outi Elina Maasalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Tässä artikkelissa esitellään valikoituja osia kahdesta metristen avaruuksien analyysiä käsittelevästä väitöskirjasta [5] ja [7]. Analyysi metrisissä avaruuksissa on kansainvälinen ja aktiivinen matematiikan ala, jonka parissa työskentelee myös useita suomalaisia tutkijoita. Molemmat väitöskirjatyöt on tehty Teknillisessä korkeakoulussa *Epälineaariset osittaisdifferentiaaliyhtälöt* -tutkimusryhmässä. Ensimmäisessä tutkitaan metristen avaruuksien geometrisia ominaisuuksia sekä Sobolev-tyyppisten epäyhtälöiden erilaisia karakterisaatioita. Jälkimmäinen käsittelee variaatiolaskentaa metrisissä avaruuksissa.

Erityistapauksista yleisempään teoriaan

Analyysi metrisissä avaruuksissa saattaa hyvinkin olla matematiikan ala, jolle hakeutuvilla ihmisillä on lapsena ollut vain yksi lelu – ja sekin tiukasti patterin välissä. Tällaisessa analyysissä lähdetään nimittäin liikkeelle hyvin vähillä tiedoilla tutkittavan avaruuden rakenteesta. Lähtökohtana on vain pistejoukko, jossa jokaisen pisteparin välille on määritelty etäisyys. Kuten arvata saattaa, kaikissa tällaisissa avaruuksissa toimivia leluja ei ole kovin paljon.

Kiinnostus yleisten metristen avaruuksien tutkimukseen lähti 1900-luvun viimeisillä vuosikymmenillä liikkeelle tarpeesta soveltaa klassisen analyysin ja potentiaaliteorian tuloksia esimerkiksi kvasikonformikuvauksia, geometrista mittateoriaa, Riemannin geometriaa ja geometrista ryhmäteoriaa koskeviin ongelmiin. Yhtenäiselle ja yleiselle teorialle oli tarvetta, jottei argumentteja tarvitsisi käydä läpi yhä uudestaan jokaisessa erityistapauksessa.

Metristen avaruuksien analyysiä voidaan motivoida myös sillä, että kun ylimääräistä tietoa avaruuden rakenteesta ei ole, "turhat" työkalut ja menetelmät eivät ole käytössä. Jokainen tiedostava vanhempihan ymmärtää, että hienojen lelujen paljous vain tukahduttaa lasten luovuuden. Kun tietoa avaruuden geometriasta ei ole, joudutaan kaivamaan ilmiöiden perimmäiset syy-seuraussuhteet esille. Tästä johtuen metristen avaruuksien analyysi paljastaa välillä mielenkiintoisia havaintoja jo klassisestakin tilanteesta ja yksinkertaistaa tunnettuja menetelmiä. Yllättävän suuri osa ilmiöistä, jotka näyttävät perustuvan euklidisen avaruuden lineaariselle rakenteelle, osoittautuvat siitä riippumattomiksi.

Kohti ensimmäisen kertaluvun differentiaalilaskentaa

Pelkällä metriikalla ei kuitenkaan pääse kovin pitkälle. Mihin tahansa pistejoukkoon voidaan määritellä metriikka vaikkapa siten, että jokaisen pisteparin etäisyys on tasan yksi metri. Tuloksena saadun metrisen avaruuden hyvät ominaisuudet on kuitenkin nopeasti lueteltu. Suurin osa mielenkiintoisista ilmiöistä taas on luonteeltaan äärellisulotteisia. Yksi toimivaksi osoittautunut tapa karsia pois patologiset tapaukset ja rajata metrisen avaruuden dimensiota on edellyttää, että sinne on määritelty tuplaava mitta. Mitan tuplaavuus tarkoittaa sitä, että jos minkä tahansa pallon säde kaksinkertaistetaan ja keskipiste pidetään samana, suuremman pallon mitan suhde pienemmän pallon mittaan on tasaisesti rajoitettu. Tuplaavuusehdon avulla saadaan esimerkiksi avaruuden Hausdorffin dimensiolle yläraja. Haluamme kuitenkin huomauttaa, että estimaatit riippuvat sekä valitusta mitasta että metriikasta eivätkä siis kerro kovinkaan paljoa avaruuden geometriasta.

Tuplaava mitta antaa metriselle avaruudelle jo huomattavan hyviä ominaisuuksia. Tällöin saadaan toimimaan muun muassa eräitä tärkeitä peitelauseita, ja näiden avulla voidaan tutkia esimerkiksi Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktioita ja saada estimaatteja funktioiden Lebesguen pisteiden määrälle.

Koska metrisessä avaruudessa ei ole lineaarista rakennetta, ja siten esimerkiksi suunnan käsite on epämääräinen, osittaisderivaattojen määritteleminen on hankalaa ellei jopa mahdotonta. Eräänlaista vastinetta osittaisderivaatoille on tutkinut **Cheeger** [1]. Täysin koordinaatistosta riippumattomaan tilanteeseen päästään kuitenkin korvaamalla gradientti niin sanotulla ylägradientilla. Tätä lähestymistapaa ovat käyttäneet ensimmäisten joukossa **Hajłasz** [3] sekä **Heino-**

nen ja **Koskela** [4]. Ylägradientin määritelmän idea on, että tarkasteltaessa avaruuden mielivaltaista pisteparia ja mitä tahansa näitä yhdistävää polkua ylägradientin polkuintegraali polun yli on suurempi kuin funktion arvojen erotus tarkasteltavissa pisteissä. Euklidisessa avaruudessa sileän funktion ylägradientiksi kelpaa siis gradientin itseisarvo. Ylägradientilta puuttuu kuitenkin monia gradientin hyviä ominaisuuksia. Se ei ole lineaarinen eli kahden funktion erotuksen ylägradientiksi ei välttämättä kelpaa ylägradienttien erotus. Toisaalta ylägradientti ei ole yksikäsitteinen, sillä mikä tahansa ylägradienttia suurempi funktio kelpaa yhtä hyvin. Monissa tilanteissa on kuitenkin olemassa yksikäsitteinen minimaalinen ylägradientti.

Käyttämällä ylägradienttia on mahdollista määritellä esimerkiksi ensimmäisen kertaluvun Sobolevin avaruudet siten, että euklidisessa tilanteessa tämä määritelmä antaa klassisen Sobolevin avaruuden. **Shanmugalingam** on kirjoittanut väitöskirjassaan systemaattisen esityksen Sobolevin avaruuksista metrisissä avaruuksissa. Tulokset on julkaistu artikkelissa [8].

Vaikka ylägradientin määritelmä ei vaadi avaruudelta erityistä rakennetta, karussa ympäristössä se ei ole kovin hyödyllinen eikä kerro välttämättä mitään funktion käytöksestä. Tuplaavan mitan ohella usein oletetaankin, että avaruudessa pätee niin kutsuttu Poincarén epäyhtälö, joka kytkee mitan ja ylägradientin yhteen. Toisin sanoen ilman Poincarén epäyhtälöä ylägradientin välittämästä lokaalista informaatiosta ei päästä globaalimpiin estimaatteihin.

Avaruus Poincarélla vai ilman?

Mitan tuplaavuus ja Poincarén epäyhtälö ovat muodostuneet standardioletuksiksi metrisen avaruuden analyysissä, ja monet klassisen analyysin tulokset on saatu yleistettyä tähän tilanteeseen. Sen sijaan meillä on vähemmän tietoa siitä, millaiset avaruudet toteuttavat nämä ehdot.

Yksi väitöskirjan [5] tutkimuskohteista oli, mitä geometrisia ominaisuuksia Poincarén epäyhtälöstä seuraa avaruudelle. Jo aiemmin on tiedetty, että epäyhtälön voimassaolo takaa muun muassa, että avaruus on yhtenäinen ja siellä on paljon äärellismittaisia polkuja. Itse asiassa avaruus on vieläpä kvasikonveksi, eli mitä tahansa pisteparia yhdistää vähintään yksi polku, jonka pituus on verrannollinen pisteiden etäisyyteen toisistaan. Ajatus on alunperin **Semmes'n**, ja todistus löytyy esimerkiksi Cheegerin artikkelista [1]. Usein yksi polku ei kuitenkaan riitä, sillä jos jotain pisteparia yhdistäisi vain yksi polku, avaruudesta tulisi epäyhtenäinen jo poistamalla yksi sopivasti valittu piste. Väitöskirjassa osoitettiinkin, että kun käytössä on riittävän vahva Poincarén epäyhtälö, kahden samankeskisen pallon väliin jäävä alue on lähes kvasikonveksi, eli mikä tahansa pistepari voidaan yhdistää lyhyehköillä poluilla, jotka pysyvät ainakin melkein alueen sisällä. Erityisesti tällaisia polkuja on useita. Vaikka alueen reunoja voidaankin hieman joutua venyttämään, tulos on aiemmin tunnettuja vahvempi ja riittävä ajatellen suurinta osaa sovelluksia. Lisäksi menetelmä on luonteeltaan kvantitatiivinen, eli itse asiassa saadaan estimaatti tällaisten polkujen määrälle.

Metrinen avaruus, jossa on tuplaava mitta ja Poincarén epäyhtälö pätee, tarjoaa siis analyysille hyvän lähtökohdan. Mikä vieläkin parempaa, ehdot täyttäviä avaruuksia on lukuisia. Helpoin esimerkki on euklidinen avaruus, jossa on Lebesguen mitta tai Lebesguen mitta painotettuna Muckenhouptin painoilla. Sen lisäksi myös esimerkiksi monet monistot ja ryhmärakenteet toteuttavat nämä ehdot.

Toki on olemassa yksinkertaisiakin esimerkkejä avaruuksista, joissa jompikumpi tai kumpikaan ehdoista ei toteudu. Tarkastellaan vaikkapa suoraa, jossa on tavallinen pituusmitta, mutta määritellään metriikka ottamalla normaalista etäisyydestä neliöjuuri. Näin saadaan toimiva metriikka, mutta neliöjuuren ottaminen repii pieniä etäisyyksiä valtavan paljon suuremmiksi. Tästä johtuen kaikki polut ovat äärettömän pitkiä. Mitä lyhyemmillä askelilla yritetään päästä paikasta toiseen sitä pidempi on matka. Ei siis kovin mukava leikkipaikka lyhytjalkaiselle lapselle, joten palaamme takaisin Poincarén epäyhtälön toteuttavaan maailmaan.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaa variaationlaskennan kautta

Vaikka ylägradientin käsite mahdollistaa Sobolevin avaruuksien määrittelemisen, osittaisdifferentiaaliyhtälöt jäävät edelleenkin lelukaupan ylähyllylle. Kiukuttelu on kuitenkin turhaa, sillä esimerkiksi suuri osa säännöllisyysteoriasta voidaan rakentaa tutkimalla heikkojen ratkaisujen sijaan variaatiointegraalien minimoijia ja kvasiminimoijia. Jälkimmäiset minimoivat integraalin vain kerroinvakiota vaille ja toisin kuin minimoijat ne säilyvät bilipschitz-kuvauksissa. Kvasiminimoijia on jo euklidisessa avaruudessa lähestyttävä variaatiolaskennan kautta, sillä niihin ei yleisesti liity Euler-Lagrangen yhtälöä. Väitöskirjassa [7] tutkitaan variaatiolaskentaan liittyviä integroituvuuskysymyksiä, joissa ilmiöt ovat luonteeltaan itseänsä parantavia. Tällä tarkoitamme sitä, että tarkasteltava funktio onkin integroituva korkeampaan potenssiin kuin sen määritelmä antaa ymmärtää.

Lokaalit tulokset vaativat usein vain mainitsemiemme standardioletusten, sekä kenties täydellisyyden, voimassaolon, kun taas globaalien tulosten todistamiseksi tarvitaan lisää tietoa avaruuden ja tarkasteltavien joukkojen geometriasta. Väitöskirjojen tulokset kietoutuvat yhteen muun muassa tutkittaessa kvasiminimoijien säännöllisyyttä. Väitöskirjassa [7] osoitetaan, että kvasiminimoijien ja niiden ylägradienttien integroituvuudella on itseparantavuusominaisuus. Väitöskirjassa [5] tutkitaan toisesta näkökulmasta ehtoja, joita itseparantavuusominaisuus edellyttää avaruudelta ja tarkasteltavalta joukolta.

Tyypillinen työkalu paremman eksponentin saavuttamiseksi on **Giaquintan** ja **Modican** [2] todistama versio Gehringin lemmasta, joka on jo itsessään itseparantavuustulos. Lemman mukaan käänteinen Hölderin epäyhtälö parantaa itseään, joten mikä tahansa funktio, joka toteuttaa käänteisen Hölderin epäyhtälön, on lokaalisti integroituva myös korkeampaan potenssiin. Lemman klassinen todistus perustuu Calderón-Zygmundin hajotelmaan, eli siihen, että kuutio voidaan peittää dyadisilla osakuutioilla, joissa funktion integraalikeskiarvoa voidaan kontrolloida.

Metrisessä avaruudessa kuutioita ei suuntien puuttuessa voida määritellä, pallot sen sijaan voidaan. Metrisen avaruuden pallot eivät tosin välttämättä ole pyöreitä tai edes yhtenäisiä, eikä pallon peittäminen palloilla ei ole enää kovinkaan siistiä. Siinä, missä kuutiopalikoilla leikkivä lapsi voi näppärästi rakentaa palikoistaan suuremman kuution, naapurin lapsi, joka on saanut pallokokoelman, voi vain katsoa kateellisena vierestä: pallojen väliin nimittäin jää väkisin lähes aina tilaa.

Vaikka metrisessä avaruudessa on käytännössä mahdoton saada täysin optimaalisia estimaatteja, mitan tuplaavuus takaa, että mitä tahansa aluetta peittämään voidaan aina valita joukko erillisiä palloja siten, että hieman suurennettuina pallot peittävät koko alueen. Väitöskirjassa [7] esitetään Gehringin lemmalle todistus metrisen avaruuden tilanteessa korvaamalla Calderón-Zygmundin hajotelma tällaisilla peiteargumenteilla ja maksimaalifunktiotekniikoilla. Hieman erilaisella menetelmällä ilmiötä ovat tutkineet muun muassa **Strömberg** ja **Torchinsky** [9].

Tämän jälkeen lokaali itseparantavuustulos seuraa suoraviivaisesti, sillä kvasiminimoijat ja niiden ylägradientit toteuttavat käänteisen Hölderin epäyhtälön kaikissa avoimen joukon palloissa, jotka ovat tarpeeksi kaukana reunasta. On kuitenkin mielenkiintoisempaa tutkia, milloin parempi integroituvuus saadaan koko joukossa. Väitöskirjassa [7] osoitetaan, että mikäli metrinen avaruus on aiemmin mainitulla tavalla lähes kvasikonveksi, ja joukon komplementti toteuttaa eräänlaisen kapasiteettitiheysehdon, lokaali tulos voidaan laajentaa globaaliksi. **Li** ja **Martio** [6] ovat todistaneet vastaavan tuloksen esteongelman ratkaisuille euklidisessa avaruudessa. Kvasiminimoijille väitöskirjan tulos on uusi myös tässä klassisessa tilanteessa.

Joukon komplementin tasainen kapasiteettitiheys on olennaista todistetussa itseparantavuustuloksessa. Vaikka euklidisessa avaruudessa esimerkiksi kaikki Lipschitz-reunaiset joukot toteuttavat tämän ehdon, kapasiteettitiheys kertoo kuitenkin enemmän joukon geometriasta kuin sen reunan säännöllisyydestä. Hieman yllättävästi tälle ehdolle saadaan hyvinkin erityyppisiä yhtäpitäviä muotoja.

Väitöskirjassa [5] osoitettiin, että tietyissä tilanteissa joukon komplementin tasainen kapasiteettitiheys on ekvivalenttia Hardyn epäyhtälön kanssa. Jo aiemmin on tiedetty, että Hardyn epäyhtälö seuraa aina komplementin tiheydestä. Toinen suunta todistetaan osoittamalla, että Hardyn epäyhtälöstä seuraa komplementin tasainen perfektisyys ja siitä edelleen kapasiteettitiheys. Tasainen perfektisyys kertoo, että joukkoon ei voi kuulua liian eristyneitä saaria missään mittakaavassa. Väitöskirjan tulokset siis osoittavat, että geometrinen kapasitettitiheysehto, analyyttinen Hardyn epäyhtälö ja luonteeltaan metrinen tasainen perfektisyys ovat yhtäpitäviä.

Tässä käsiteltyjen väitöskirjojen aiheet valottavat kahta erilaista mutta tyypillistä näkökulmaa analyysiin metrisissä avaruuksissa. Toisaalta ollaan kiinnostuneita siitä, mitkä klassisen analyysin tuloksista ja menetelmistä on yleistettävissä. Toisaalta on tärkeä tietää, mitä välttämättömät oletukset avaruuden rakenteesta oikeastaan tarkoittavat.

Ennen kaikkea analyysi metrisissä avaruuksissa tarjoaa uuden ja hyödyllisen näkökulman esimerkiksi epälineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaan. Tosin tälläkin lähestymistavalla on rajoituksensa. Esimerkiksi korkeamman kertaluvun differentiaalilaskentaa ei toistaiseksi ole saatavilla edes, sanokaamme, lelukaupan tiskin alta.

Viitteet

[1] L. Cheeger. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 9(3):428–517, 1999.

[2] M. Giaquinta and G. Modica. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *J. Reine Angew. Math.*, 311/312:145–169, 1979.

[3] P. Hajłasz . Sobolev spaces on an arbitrary metric space. *Potential Anal.*, 5(4):403–415, 1996.

[4] J.Heinonen and P.Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.*, 181:1–61, 1998.

[5] R. Korte. *Geometric properties of metric measure spaces and Sobolev-type inequalities.* PhD thesis, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, 2008.

[6] G. Li and O. Martio. Stability and higher integrability of derivatives of solutions in double obstacle problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 272(1):19–29, 2002.

[7] O.E. Maasalo. *Self-improving phenomena in the calculus of variations on metric spaces.* PhD thesis, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, 2008.

[8] N. Shanmugalingam. Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16(2):243–279, 2000.

[9] J.-O. Strömberg and A. Torchinsky. *Weighted Hardy Spaces*, volume 1381 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1989.