Väitöstutkimuksia epälineaarisista parabolisista yhtälöistä ja systeemeistä

Tuomo Kuusi ja Mikko Parviainen

1 Lämmön johtumisesta veden virtaukseen

Epälineaaristen parabolisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja -systeemien parissa työskentelee useita suomalaisia nuoria tutkijoita. Seuraavassa esitellään kahta Teknillisessä korkeakoulussa *Epälineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ryhmässä* tehtyä väitöstutkimusta. Molemmat väitöstutkimukset liittyvät epälineaaristen parabolisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden säännöllisyysteoriaan. Ensimmäisessä tarkastellaan ratkaisun muutosnopeuden singulariteetteja ja toisessa ratkaisun käyttäytymistä.

Perinteinen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden tutkimus on usein keskittynyt tutkimaan stationaarisia ilmiöitä. Jos halutaan ymmärtää paremmin luonnon dynamiikkaa, joudutaan muutos ajassa kuitenkin huomioimaan, ja näin päädytään usein tutkimaan parabolisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Eräs tunnettu esimerkki tällaisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä on lämpöyhtälö, joka mallintaa muun muassa kappaleen lämpötilan muuttumista lämmönjohtumisen ja mahdollisten ulkoisten tekijöiden vaikutuksesta. Nimestään huolimatta lämpöyhtälöllä on myös paljon muita sovelluksia kemikaalien diffuusiosta pörssikurssien heilahteluun.

Lämpöyhtälö pukee matematiikan kielelle ajatuksen siitä, että kappaleen lämpötila muuttuu lämmönjohtumisen seurauksena ja lämmönjohtuminen on suoraan verrannollinen lämpötilaeroihin. Ajatus tuntuu arkielämän havaintojen perusteella melko uskottavalta: Jos ulkona on pakkasta, karkaa lämpöä sisältä nopeammin kuin kesähelteellä. Pitkän ajan kuluttua päädytään sopivissa olosuhteissa olennaisesti tasapainolämpötilaan, joka ei enää muutu. Tätä tasapainotilaa voidaan sitten mallintaa stationaarisella mallilla.

Lämpöyhtälö on esimerkki lineaarisesta parabolisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä. Tällaisten yhtälöiden ratkaisut säilyvät ratkaisuina vakiolla kerrottaessa tai laskettaessa ratkaisuja yhteen. Näitä ominaisuuksia hyödyntäen voidaan lämpöyhtälölle johtaa yleinen ratkaisukaava, josta pystytään usein melko suoraviivaisesti lukemaan ratkaisun ominaisuuksia. Esityskaavan avulla voidaan esimerkiksi todistaa, että lämpöyhtälön ratkaisut muuttuvat ajan kuluessa varsin nopeasti säännöllisemmiksi lämpötilaerojen tasoittuessa.

Lineaarisilla yhtälöillä on kuitenkin rajoituksensa. Joskus kuulee sanottavan, että 1800-luvun suuri keksintö oli se, että luontoa mallintavat yhtälöt ovat lineaarisia, kun taas 1900-luvun suuri keksintö oli se, että ne eivät ole. Epälineaarisista parabolisista yhtälöistä mainittakoon erikoistapauksina parabolinen p-Laplacen yhtälö ja huokoisen aineen yhtälö. Parabolisella p-Laplacen yhtälöllä on sovelluksia esimerkiksi nestedynamiikkaan, kuvankäsittelyyn, ja se myös liittyi Neuvostoliiton ydinohjelmaan, jossa Barenblatt [1] ja Zel'dovich-Kompaneets [18] mallinsivat lämpörintaman etenemistä. Nykyisin keskittyneen alkujakauman aikaansaamaa perusratkaisua kutsutaankin Barenblattin ratkaisuksi. Huokoisen aineen yhtälö taas on kehitetty mallintamaan veden kulkeutumista huokoisessa maaperässä, ja ovatpa tähtitieteilijät perustelleet sillä jopa älyllisen elämän hidasta leviämistä galaksien välillä, Newman-Sagan [13]. Huokoisen aineen yhtälöön voi tutustua esimerkiksi Vázquezin kirjoista [16, 17].

Epälineaarisilta yhtälöiltä puuttuvat monet lineaaristen yhtälöiden hyvistä skaalaus- ja summausominaisuuksista. Niinpä niille ei yleensä saada johdettua yleisiä ratkaisukaavoja, joista ominaisuudet voitaisiin lukea. Epälineaaristen yhtälöiden ominaisuudet joudutaan tyypillisesti todistamaan tapauskohtaisesti: tulokset perustuvat kovaan analyysiin ja tarkkoihin yhtälön rakenteen huomioiviin arvioihin. Useinkaan tuloksia ei voida saavuttaa yleisillä funktionaalianalyyttisillä menetelmillä. Yhtälöiden sijaan voidaan tutkia myös systeemejä, joissa yhden tutkittavan suureen sijaan on useita toisiinsa vaikuttavia suureita. Suureiden vuorovaikutuksen takia systeemien käsittely saattaa olla huomattavasti vaikeampaa kuin yhden yhtälön.

Epälineaarisessa teoriassa esiintyy useita uusia ilmiöitä, jotka vaikeuttavat todistuksia lineaariseen teoriaan verrattuna. Esimerkiksi degeneroituneessa parabolisessa tapauksessa perusratkaisuun muodostuu niin sanottu vapaa pinta, jonka toisella puolella ratkaisu on positiivinen ja toisella puolella nolla. Tämä johtuu siitä, että yhtälö kuljettaa informaatiota äärellisellä nopeudella, eli esimerkiksi maaperässä virtaavalta nesteeltä kuluu tietty aika saavuttaa kukin kohta maaperässä. Vapaa pinta rikkoo ratkaisun säännöllisyyden, mikä joudutaan huomioimaan matemaattisissa tarkasteluissa esimerkiksi skaalaamalla geometriaa. Singulaarisessa tapauksessa esiintyy niin kutsuttu sammumisilmiö äärellisen ajan kuluttua. Lämpöyhtälöllä tällaisia ominaisuuksia ei sen sijaan ole, vaan keskittynyt alkulämpötilajakauma leviää välittömästi kaikkialle, ja ratkaisu on positiivinen kaikilla myöhemmillä ajanhetkillä. Tämä epäfysikaalinen käyttäytyminen johtuu pohjimmiltaan siitä yksinkertaisesta oletuksesta, että lämmön johtuminen riippuu lineaarisesti lämpötilaerosta.

2 Arvioita gradientille

Lämpöyhtälön ratkaisun todettiin olevan säännöllinen, vaikka alkulämpötilajakauma olisi epäsäännöllinen. Herää kysymys, voisiko epälineaarisilla yhtälöillä olla vastaavankaltainen ominaisuus. Jotta degeneroituneiden parabolisten yhtälöiden heikoista ratkaisuista voitaisiin ylipäänsä puhua, täytyy olettaa, että ratkaisujen gradientit ovat riittävän säännöllisiä. Käy kuitenkin ilmi, että yhtälö parantaa itseään, eli että ratkaisujen gradientit ovat säännöllisempiä, kuin mitä alunperin oletettiin. Erityisesti tämä tarkoittaa, että ratkaisun muutosnopeuden singulariteetit eivät olekaan niin pahoja, kuin voisi odottaa. Tätä ilmiötä kutsutaan gradientin korkeammaksi integroituvuudeksi.

Ensimmäinen, joka tutki korkeampaa integroituvuutta, lienee ollut Bojarski. Vuonna 1957 ilmestyneessä artikkelissaan [2] hän tarkasteli stationaarisia systeemejä tasossa. Myöhemmin Elcrat ja Meyers [9] todistivat, että stationaarisilla epälineaarisilla systeemeillä on myös vastaava ominaisuus. Todistukset eivät kuitenkaan suoraan yleisty paraboliseen tapaukseen, sillä aikaevoluutio aiheuttaa tiettyjä hankaluuksia. Giaquinta ja Struwe [6] onnistuivat kuitenkin todistamaan korkeamman integroituvuuden parabolisille systeemeille eräässä erikoistapauksessa. Yleinen tapaus säilyi sen sijaan pitkään avoimena ongelmana. Sen ratkaisivat vuonna 2000 Kinnunen ja Lewis [7].

Syy gradientin korkeamman integroituvuuden tutkimiseen löytyy toisaalta sovelluksista ja toisaalta mielenkiinnosta ratkaisujen säännöllisyyttä kohtaan. Kyseessä on perustyökalu, jota käytetään muiden säännöllisyystulosten todistamiseksi systeemejä tutkittaessa. Jotta osittaisdifferentiaaliyhtälöä voitaisiin käyttää fysikaalisena mallina, on usein perusedellytys, että yhtälön ratkaisut ovat stabiileja mitattavien parametrien suhteen. Näin pienet mittausvirheet aiheuttavat vain pienen muutoksen ratkaisuihin. Gradientin korkeampi integroituvuus on käyttökelpoinen ominaisuus stabiilisuutta tutkittaessa, sillä jos ratkaisut kuuluvat parempaan luokkaan, ne kestävät parametrien vaihtelua paremmin.

Kaikki kappaleen alussa mainitut tulokset ovat paikallisia, eli ne pätevät etäällä alueen reunoista. Usein varsinkin käytännön sovelluksissa reunan vaikutusta ei voi jättää huomiotta esimerkiksi siksi, että reaalimaailmassa kappaleet ovat rajoitettuja. Väitöstutkimuksessa [14] osoitetaan, että degeneroituneiden parabolisten yhtälöiden ja systeemien gradientit ovat oletettua säännöllisempiä reunalle asti tietyillä oletuksilla (katso myös [15]). Todistuksessa tilannetta tarkastellaan ensin paikallisesti sopivassa geometriassa, ja lopuksi yleinen tulos kootaan peiteargumentteja käyttäen. Käy ilmi, että epälineaarisuudesta ja reunaehdoista johtuen sopiva geometria riippuu sekä reunaehdoista että ratkaisun gradientista itsestään. Intuitiivisesti yhtälöä katsotaan sellaisessa geometriassa, jossa ratkaisu käyttäytyy jossain määrin lämpöyhtälön ratkaisun tapaan. Jatkotutkimusten kohteena ovat tulosten laajentaminen singulaariseen tapaukseen ja sovellukset stabiilisuuteen.

3 Ratkaisun käyttäytyminen

Hilbertin 19. kysymyksen, eli ovatko kaikkien säännöllisten variaatio-ongelmien ratkaisut välttämättä analyyttisiä, myönteinen vastaus kiteytyi siihen, ovatko ratkaisut Hölderin jatkuvia. Hölderin jatkuvuuden todistivat riippumattomasti De Giorgi [3] ja Nash [12] täysin eri menetelmin.

1960-luvulla Moser [10], [11] todisti Hölderin jatkuvuuden lineaarisille parabolisille osittaisdifferentiaaliyhtälöille käyttäen apuna nk. Harnackin epäyhtälöä. Se kertoo, että jos ratkaisu on annettuna alueessa, johon kuuluu $2r$-säteinen pallo, niin ratkaisun *maksimia* r-säteisessä pallossa tällä ajanhetkellä rajoittaa ratkaisusta riippumattomalla vakiolla kerrottu ratkaisun *minimi* samassa pallossa, mutta vasta tietyn odotusajan kuluttua. Stationaarisessa tapauksessa tällaista odotusaikaa ei ole.

Esimerkit näyttävät, että sama tulos ei voi olla totta epälineaarisessa tapauksessa. Ymmärtääksemme ongelman, voimme jälleen palata maaperässä virtaavan veden tarkasteluun. Jos aiemmin mainittu Harnackin epäyhtälö olisi voimassa, tapahtuisi seuraavaa: Oletetaan, että maaperä olisi kostea rajatussa alueessa ja muu maa olisi kuivaa. Harnackin epäyhtälö kertoisi, että kosteus leviäisi kaikkialle maaperään välittömästi. Intuitiivisesti on selvää, että näin ei voi tapahtua. Osoittautuu, että tämä on tilanne myös matemaattisesti.

Ongelma siitä, mikä on epälineaarinen Harnackin epäyhtälö, säilyi avoimena ongelmana aina 1980-luvun lopulle, jolloin DiBenedetto ja Herrero [5] osoittivat, että Harnackin epäyhtälössä odotusajan pituus riippuu ratkaisun suuruudesta tarkasteluhetkellä. Eli toisin kuin korkeamman integroituvuuden tapauksessa, nyt aikaskaalan määrää ratkaisun suuruus sen gradientin suuruuden sijasta. Todistuksen ongelma oli se, että se käsitti ainoastaan homogeenisen tapauksen. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisessa pisteessä sääntö, jolla esimerkiksi vesi leviää, riippuu täsmälleen samalla tavalla ratkaisusta. Fysikaalisesti on selvää, että jos maaperän rakenne muuttuu, niin myös vapaan reunan ympyränmuoto rikkoutuu. Samanlainen ilmiö rikkoo myös yllämainitun todistuksen vuodelta 1989. Tästä syystä ratkaisu ei ollut vielä fysikaalisesti - eikä ennenkaikkea matemaattisesti - tyydyttävä.

Viimeisen kahden vuoden aikana ratkaisu on lopulta saatu valmiiksi. DiBenedetto, Gianazza ja Vespri [4] todistavat yleisen tuloksen hyödyntäen De Giorgin aikoinaan kehittämiä menetelmiä. Väitöstyössä [8] todistetaan sama tulos soveltaen Moserin menetelmiä. Suurin osa työn tuloksista käsittelee yleisempää superratkaisujen luokkaa. Tämä ratkaisujen luokka on erittäin mielenkiintoinen jatkotutkimuksen kannalta, ja sillä on lukuisia sovelluksia. Superratkaisuiden ominaisuudet stationaarisessa tapauksessa liittyvät läheisesti Suomessa paljon tutkittuun potentiaaliteoriaan. Vastaavassa ajasta riippuvassa teoriassa on lukuisia vielä tutkimuksen alla olevia kysymyksiä. Väitöstyön tulokset voivat osoittautua hyödyllisiksi tässä yhteydessä. Tuloksilla on myös sovelluksia, kun tutkitaan ratkaisuiden olemassaoloa.

Lopuksi kerrottakoon, mitä väitöskirjojen tulokset kertoisivat yhtälön, joka mallintaa veden virtausta maaperässä, ratkaisuista. Ensinnäkin tulokset kertoisivat vakiota vaille tarkasti, kuinka maaperän kosteus muuttuu ajan kuluessa. Toiseksi tulokset ennustaisivat, kuinka nopeasti kosteus leviäisi maaperään. Ennenkaikkea voisimme päätellä, kuinka kaukana kosteasta alueesta maa olisi varmasti kuivaa tietyn ajan jälkeen. Kyseinen tulos ei myöskään ole erityisen herkkä maaperän rakenteelle. Kolmanneksi tulokset kertoisivat numeerisia laskuja varten sen, että kuinka nopeaa kosteuden muutos olisi ajassa eteenpäin kuljettaessa. Tämän perusteella voitaisiin valita aikahila, jossa ongelma ratkaistaisiin. Tällainen adaptiivinen algoritmi voisi nopeuttaa ja tarkentaa huomattavasti ongelman numeerista ratkaisemista.

Viitteet

[1] G. I. Barenblatt. On self-similar motions of a compressible fluid in a porous medium. *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.*, 16:679–698, 1952.

[2] B. V. Bojarski. Generalized solutions of a system of differential equations of first order and of elliptic type with discontinuous coefficients (Russian). *Mat. Sb. N.S.*, 43(85):451–503, 1957.

[3] E. De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*, 3:25–43, 1957.

[4] E. DiBenedetto, U. Gianazza, and V. Vespri. Intrinsic Harnack estimates for nonnegative local solutions of degenerate parabolic equations. Ilmestyy *Acta Math.*

[5] E. DiBenedetto and M. A. Herrero. On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314(1):187–224, 1989.

[6] M. Giaquinta and M. Struwe. On the partial regularity of weak solutions of nonlinear parabolic systems. *Math. Z.*, 179(4):437–451, 1982.

[7] J. Kinnunen and J. L. Lewis. Higher integrability for parabolic systems of p-Laplacian type. *Duke Math. J.*, 102(2):253–271, 2000.

[8] T. Kuusi. Harnack estimates for supersolutions to a nonlinear degenerate parabolic equation. *Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics Research Reports A532*, 2007. http://math.tkk.fi/reports/a532.pdf

[9] N. G. Meyers and A. Elcrat. Some results on regularity for solutions of non-linear elliptic systems and quasi-regular functions. *Duke Math. J.*, 42:121–136, 1975.

[10] J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:577–591, 1961.

[11] J. Moser. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:101–134, 1964.

[12] J. F. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.*, 80:931–954, 1958.

[13] W.I. Newman and C. Sagan. Galactic civilizations: Population dynamics and interstellar diffusion. *Icarus*, 46(3):293–327, 1981.

[14] M. Parviainen. Global higher integrability for nonlinear parabolic partial differential equations in nonsmooth domains. *Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics Research Reports, A529*, 2007. http://lib.tkk.fi/Diss/2007/isbn9789512289400/

[15] M. Parviainen. Global higher integrability for parabolic quasiminimizers in nonsmooth domains. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 31(1):75–98, 2008.

[16] J. L. Vázquez. *Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations*, volume 33 of *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.* Oxford University Press, Oxford, 2006. Equations of porous medium type.

[17] J. L. Vázquez. *The porous medium equation*. Oxford Math. Monogr. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2007. Mathematical theory.

[18] Y.B. Zel'dovich and A.S. Kompaneets. Theory of heat transfer with temperature dependent thermal conductivity. In *Collection in honour of the 70th birthday of academician A.F. Ioffe,*, pages 61–71, Moscow, 1950. Akad. Nauk. SSSR.