Kopuloiden teoria pähkinänkuoressa

Lasse Leskelä*

8. toukokuuta 2012

Tiivistelmä

Tässä luentomonisteessa esitetään kopuloiden teorian perusteet suurin piirtein sillä tasolla, mitä niitä käsiteltiin kurssilla *MATS262 Stokastiikka 1* (Jyväskylän yliopisto, kevät 2012).

1 Johdanto

Tarkastellaan jollain todennäköisyysavaruudella määriteltyjä satunnaismuuttujia $X_1, \ldots, X_n$, jotka voivat olla riippuvia tai riippumattomia. Tunnetusti satunnaismuuttujien kertymäfunktiot $F_1, \ldots, F_n$ määrittävät kunkin satunnaismuuttujan jakauman mutta eivät näiden yhteisjakaumaa. Esimerkiksi pelkkien kertymäfunktioiden perusteella emme voi laskea todennäköisyyttä, että $X_1 + \cdots X_n > 0$, jollemme tiedä mitään summattavien satunnaismuuttujien riippuvuusrakenteesta. Herää kysymys, voidaanko annettujen satunnaismuuttujien riippuvuusrakenne kuvata jollakin funktiolla C siten, että kuvausperhe $(F_1, \ldots, F_n, C)$ täydellisesti määrittäisi satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_n)$ yhteisjakauman? Myönteinen vastaus tähän kysymykseen voidaan muotoilla kopuloiden avulla. Kopuloiden teoria tarjoaa kaksi tärkeää näkökulmaa stokastiikkaan:

- *Analyysi.* Mielivaltaisen satunnaisvektorin jakauma voidaan pilkkoa kahteen osaan, joista toinen (reunajakaumat) kuvaa vektorin komponenttien käyttäytymistä erikseen, ja toinen (kopula) komponenttien riippuvuusrakennetta. Tällainen esitys tarjoaa tavan ymmärtää syvällisesti satunnaisvektoreiden riippuvuusrakenteita.

- *Synteesi.* Mielivaltainen kopula yhdistettynä mielivaltaiseen kokoelmaan yksiulotteisia jakauma tarjoaa joustavan tavan rakentaa uudenlaisia jakaumia, missä riippuvuusrakennetta voidaan kuvata halutulla tavalla yksittäisten häntäjakaumien rakenteesta riippumatta.

*Matematiikan ja tilastotieteen laitos, PL 35, 40014 Jyväskylän yliopisto. URL: http://www.iki.fi/lsl/ Email: lasse.leskela@iki.fi

Tässä monisteessa painotutaan kopuloiden analyysiin ja erityisesti todistetaan Sklarin lause, joka takaa että jokainen $\mathbb{R}^n$:n todennäköisyysjakauma voidaan esittää kopulan avulla. Kopuloiden sovelluksista mallintamisessa ja tilastotieteessä kiinnostuneille suositellaan tutustumaan esimerkiksi McNeilin, Freyn ja Embrechtsin kirjan[1, Luku 5] lukuun 5.

2 Kopulan määritelmä ja jakaumien synteesi

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *kopula* C on jonkin $\mathbb{R}^n$:n satunnaisvektorin $(U_1, \dots, U_n)$ yhteiskertymäfunktio

$$C(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{P}(U_1 \le u_1, \dots, U_n \le u_n), \tag{2.1}$$

missä vektorin $(U_1, \dots, U_n)$ komponentit ovat tasajakautuneita välillä $(0, 1)$. Kopulan C laskemiseksi riittää luonnollisesti tietää C:n arvot yksikkökuutiossa $[0, 1]^n$. Jokaiselle $\mathbb{R}^n$:n kopulalle pätee:

- $C(u_1, \dots, u_n)$ on kasvava kunkin komponentin u_i suhteen.
- $C(u) = u_i$ mikäli vektorin $u = (u_1, \dots, u_n)$ komponentit i:nnettä lukuunottamatta ovat ykkösiä.
- Kaikilla $(a_1, \dots, a_n)$ ja $(b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ joille $a_i \le b_i$ kaikilla i pätee
$$\sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_n=1}^{2} (-1)^{j_1+\cdots+j_n} C(u_{1,j_1}, \dots, u_{n,j_n}) \ge 0,$$
missä $u_{i,1} = a_j$ ja $u_{i,2} = b_j$.

Ensimmäiset kaksi ylläolevaa ominaisuutta nähdään heti esityksestä (2.1); kolmas puolestaan takaa, että

$$\mathrm{P}(a_1 < U_1 \le b_1, \, \dots, \, a_n < U_n \le b_n) \, \ge \, 0.$$

Toistaalta voidaan myös osoittaa, että jokainen funktio $C : [0, 1]^n \to [0, 1]$, jolla on yllämainitut kolme ominaisuutta, on kopula.

Lause 2.1 (Synteesi)**.** *Jos C on $\mathbb{R}^n$:n kopula ja $F_1, \dots, F_n$ ovat kertymäfunktioita $\mathbb{R}$:llä, niin*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \tag{2.2}$$

on yhteiskertymäfunktio satunnaisvektorille, jonka komponenttien jakaumat ovat $F_1, \dots, F_n$.

Todistus. Harjoitustehtävä. ☐

Yhtälö (2.2) kiteyttää hyvin kopulan käsitteen: kopula kuvaa satunnaismuuttujien riippuvuuden ja reunakertymäfunktiot kuvaavat miten kukin satunnaismuuttuja sellaisenaan on jakautunut. Sanomme, että C on satunnaisvektorin $X = (X_1, \dots, X_n)$ kopula, mikäli X:n yhteiskertymäfunktio F toteuttaa yhtälön (2.2).

3 Satunnaismuuttujan kvantiilifunktio

Olkoon μ jakauma $\mathbb{R}$:llä, tarkemmin sanoen todennäköisyysmitta $\mathbb{R}$:n Borel-joukoilla. Jakauman μ kertymäfunktio määritellään kaavalla

$$F(x) = \mu(-\infty, x], \quad x \in \mathbb{R}$$

ja kvantiilifunktio kaavalla

$$Q(u) = \inf\{r \in \mathbb{R} : \mu(-\infty, r] \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Kuvaus $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jonkin jakauman kertymäfunktio, jos F on kasvava ja oikealta jatkuva sekä $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Tällöin F määrää vastaavan jakauman yksikäsitteisesti. Kertymäfunktiota F vastaavan jakauman kvantiilifunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q(u) = \inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Jos F on jatkuva ja aidosti kasvava, on F bijektio avaruudesta $\mathbb{R}$ avaruuteen $(0, 1)$, ja tällöin $Q = F^{-1}$ on F:n käänteisfunktio (todistetaan alla). Tästä syystä kvantiilifunktiota Q kutsutaan joskus myös F:n yleistetyksi käänteisfunktioksi.

Lemma 3.1. *Olkoon Q kertymäfunktiota F vastaava kvantiilifunktio. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $u \in (0, 1)$ pätee*

$$u \leq F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Q(u) \leq x. \tag{3.1}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 3.2. *Kvantiilifunktiolle $Q : (0, 1) \to \mathbb{R}$ pätee:*

(i) Q on kasvava,

(ii) Q on vasemmalta jatkuva.

Todistus. Merkitään $L_u = \{s : F(s) \geq u\}$. Koska $L_u \supset L_v$ kaikilla $u \leq v$, seuraa välittömästi $Q(u) = \inf L_u \leq \inf L_v = Q(v)$, eli Q on kasvava.

Vasemmalta jatkuvuuden näyttämiseksi valitaan jokin luku $u \in (0, 1)$ ja mielivaltaisen pieni $\epsilon > 0$. Valitaan sellainen w, jolle $Q(u) - \epsilon < w < Q(u)$. Nyt $F(w) < u$ Lemman 3.1 ominaisuuden (3.1) nojalla. Olkoon nyt

$t \in (F(w), u)$. Tällöin $w < Q(t)$ jälleen (3.1) nojalla ja lisäksi $Q(t) \leq Q(u)$ koska Q on kasvava. Siispä

$$Q(u) - \epsilon < Q(t) \leq Q(u).$$

kaikilla $t \in (F(w), u)$. Koska ϵ oli mielivaltaisen pieni, vasemmalta jatkuvuus seuraa. □

4 Kvantiiliesityslause

4.1 Kertymämuunnos ja kvantiilimuunnos

Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X, jolla on kertymäfunktio $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$ ja kvantiilifunktio $Q(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$. Satunnaismuuttujan X *kertymämuunnos* on satunnaismuuttuja $F(X)$, joka saadaan evaluoimalla X:n kertymäfunktio satunnaisessa pisteessä X. Satunnaismuuttujan X *kvantiilimuunnos* on satunnaismuuttuja $Q(U)$, joka saadaan evaluoimalla X:n kvantiilifunktio satunnaisessa välillä $(0, 1)$ tasajakautuneessa pisteessä U.

Tarkastellaan hetki tapausta, missä F on bijektio joukosta $\mathbb{R}$ välille $(0, 1)$, jolloin X:n kvantiilifunktio on F:n käänteiskuvaus. Tällöin X:n kertymämuunnokselle $F(X)$ pätee

$$\mathrm{P}(F(X) \leq u) = \mathrm{P}(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u,$$

mistä näemme, että X:n kertymämuunnos on tasajakautunut välillä $(0, 1)$. Toisaalta jos U on tasajakautunut satunnaismuuttuja välillä $(0, 1)$, niin tällöin

$$\mathrm{P}(Q(U) \leq x) = \mathrm{P}(U \leq F(x)) = F(x),$$

mistä puolestaan näemme, että X:n kvantiilimuunnos $Q(U)$ noudattaa samaa jakaumaa kuin X.

4.2 Yleistetty kertymämuunnos

Tutkitaan seuraavaksi, miten ylläolevat havainnot voidaan yleistää mielivaltaisille satunnaismuuttujille, joiden kertymäfunktio ei välttämättä ole bijektiivinen. Yleisesti voidaan näyttää, että X:n kvantiilimuunnos $Q(U)$ on aina samoin jakautunut kuin X. Tämä tarjoaa käytännöllisen tavan simuloida otoksia X:n jakaumasta. Sen sijaan X:n kertymämuunnos ei ole tasajakautunut, mikäli F ei ole jatkuva. Halutunlainen tasajakautunut lopputulos saadaan muokkaamalla kertymämuunnoksen arvoja epäjatkuvuuskohdissa sopivasti valitulla satunnaisella häiriötekijällä. Määritellään kuvaus $\tilde{F} : \mathbb{R} \times (0, 1) \to [0, 1]$ kaavalla

$$\tilde{F}(x, v) = F(x-) + v\Delta F(x), \quad x \in \mathbb{R},\ v \in (0, 1), \tag{4.1}$$

missä $F(x-)$ on F:n vasemmanpuolinen raja-arvo x:ssä ja $\Delta F(x) = F(x) - F(x-)$. Suoraan määritelmästä havaitaan, että

$$F(x-) \leq \tilde{F}(x, v) \leq F(x) \tag{4.2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $v \in (0, 1)$. Erityisesti $\tilde{F}(x, v) = F(x)$ mikäli F on jatkuva pisteessä x. Satunnaismuuttujan X *yleistetty kertymämuunnos* on satunnaismuuttuja

$$U = \tilde{F}(X, V),$$

missä V on X:stä riippumaton tasajakautunut satunnaismuuttuja välillä $(0, 1)$.

4.3 Kvantiiliesityslause

Seuraava lause kertoo, että mielivaltaisen satunnaismuuttujan X yleistetty kertymämuunnos $U = \tilde{F}(X, V)$ on tasajakautunut välillä $(0, 1)$. Lisäksi se kertoo, että X:n kvantiilimuunnos evaluoituna $Q(U)$, ei ole pelkästään samoin jakautunut kuin X, vaan peräti tuottaa samat otokset kuin X todennäköisyydellä yksi. Tämä lause tarjoaa elegantin tavan todistaa kopuloiden esityslause myöhemmin.

Lause 4.1. *(Rüschendorf [2]) Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on F ja kvantiilifunktio Q. Olkoon $U = \tilde{F}(X, V)$, missä satunnaismuuttuja V on X:stä riippumaton ja tasajakautunut välillä $(0, 1)$. Tällöin U on tasajakautunut välillä $(0, 1)$ ja lisäksi*

$$X = Q(U)$$

melkein varmasti.

Lauseen sivutuotteina saadaan kaksi tärkeää tulosta, joiden todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

Seuraus 4.2 (Kvantiilimuunnos)**.** *Olkoon X satunnaismuuttuja, jolla on kertymäfunktio F ja kvantiilifunktio Q. Olkoon U mielivaltainen tasajakautunut satunnaismuuttuja välillä $(0, 1)$. Tällöin X ja $Q(U)$ ovat samoin jakautuneita.*

Seuraus 4.3 (Jatkuvan jakauman kertymämuunnos)**.** *Jos satunnaismuuttujalla X on jatkuva kertymäfunktio F, niin tällöin X:n kertymämuunnos $F(X)$ on tasajakautunut välillä $(0, 1)$.*

Ennen lauseen todistamista perustelemme seuraavan aputuloksen, jonka mukaan kvantiilimuunnoksen kannalta ei ole väliä käytetäänkö kvantiilin laskemisessa F:n tasa-arvojoukon alempaa vai ylempää reunapistettä.

Lemma 4.4. *Olkoon F jonkin satunnaismuuttujan kertymäfunktio ja U jokin satunnaismuuttuja välillä $(0,1)$, jolla on jatkuva jakauma. Tällöin $Q(U) = Q_+(U)$ melkein varmasti, missä*

$$\begin{aligned} Q(u) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \\ Q_+(u) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}. \end{aligned}$$

Todistus. Koska $Q(u) \leq Q_+(u)$ kaikilla $u \in (0,1)$, havaitsemme että

$$\{u : Q(u) \neq Q_+(u)\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} \{u : Q(u) \leq c < Q_+(u)\},$$

mistä seuraa, että

$$\mathrm{P}(Q(U) \neq Q_+(U)) \leq \sum_{c \in \mathbb{Q}} \mathrm{P}(Q(U) \leq c < Q_+(U)).$$

Lisäksi

$$\mathrm{P}(Q(U) \leq c < Q_+(U)) = \mathrm{P}(Q(U) \leq c) - \mathrm{P}(Q_+(U) \leq c).$$

Koska $Q(u) \leq c$ jos ja vain jos $u \leq F(c)$, ja koska ominaisuudesta $u < F(c)$ seuraa $Q_+(u) \leq c$, havaitsemme että

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Q(U) \leq c < Q_+(U)) \;&\leq\; \mathrm{P}(U \leq F(c)) - \mathrm{P}(U < F(c)) \\ &=\; \mathrm{P}(U = F(c)). \end{aligned}$$

Koska U:n jakauma on jatkuva, on ylläolevan epäyhtälön oikea puoli nolla, ja väite seuraa. □

Lauseen 4.1 todistus. Todistaaksemme, että U on tasaisesti jakautunut tulee näytää, että

$$\mathrm{P}(U \leq u) = u, \tag{4.3}$$

missä u on mielivaltainen välin $(0,1)$ piste. Merkitään $y = Q(u)$ ja aloitetaan näyttämällä toteen että

$$\mathrm{P}(U \leq u,\, X > y) \;=\; 0. \tag{4.4}$$

Jos $x > Q(u)$, niin $F(x-) \geq u$. Tämän takia kaikilla $v \in (0,1)$ pätee

$$\begin{aligned} \{x : \tilde{F}(x,v) \leq u,\; x > Q(u)\} &= \{x : F(x-) = u,\; \Delta F(x) = 0,\; x > Q(u)\} \\ &\subset \{x : F(x) = u,\; x > Q(u)\}. \end{aligned}$$

Koska $\mathrm{P}(F(X) = u,\; X > Q(u)) = 0$ (harjoitustehtävä), yhtälö (4.4) on tosi. Analysoidaan seuraavaksi U:n kertymäfunktiota tapauksessa $X < y$. Jos $x < Q(u)$, niin $\tilde{F}(x,v) \leq F(x) < u$ kaikilla $v \in (0,1)$. Tästä seuraa, että

$$\mathrm{P}(U \leq u,\, X < y) = \mathrm{P}(X < y) = F(y-). \tag{4.5}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.4) ja (4.5) havaitsemme, että $\mathrm{P}(U \le u) = F(y-)$ mikäli F on jatkuva y:ssä. Toisaalta jos F on jatkuva y:ssä, pätee myös $F(y-) = u$. Voimme siis todeta, että yhtälö (4.3) pätee mikäli $\Delta F(y) = 0$.

Näytetään seuraavaksi yhtälö (4.3) toteen kun $\Delta F(y) > 0$. Tarkastellaan U:n kertymäfunktiota tapauksessa $X = y$. Näytämme, että

$$\mathrm{P}(U \le u,\, X = y) \;=\; u - F(y-). \tag{4.6}$$

Tämän toteamiseksi huomaa, että

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U \le u,\, X = y) &= \mathrm{P}(F(y-) + V\Delta F(y) \le u,\, X = y) \\ &= \mathrm{P}\left(V \le \frac{u - F(y-)}{\Delta F(y)}\right)\mathrm{P}(X = y).\end{aligned}$$

Ylläolevassa kaavassa $\frac{u-F(y-)}{\Delta F(y)} \in [0,1]$, koska $F(y-) \le u \le F(y)$. Koska V on tasajakautunut välillä $(0,1)$ ja $\mathrm{P}(X = y) = \Delta F(y)$, havaitsemme että yhtälö (4.6) pätee. Nyt laskemalla yhteen yhtälöt (4.4), (4.5) ja (4.6) havaitsemme, että (4.3) pätee myös silloin kun $\Delta F(y) > 0$. Satunnaismuuttuja U on siis tasajakautunut välillä $(0,1)$.

Näytetään lopuksi, että $Q(U) = X$ melkein varmasti. Epäyhtälöstä (4.2) seuraa, että $F(X-) \le U \le F(X)$ melkein varmasti. Lisäksi pätee $F(x-) \le u \implies x \le Q_+(u)$, missä $Q_+(u)$ on kuten Lemmassa 4.4. Koska $u \le F(x)$ jos ja vain jos $Q(u) \le x$, niin voimme päätellä että $Q(U) \le X \le Q_+(U)$ melkein varmasti. Tästä puolestaan seuraa, että

$$\mathrm{P}(X \ne Q(U)) \;\le\; \mathrm{P}(Q(U) < Q_+(U)).$$

Koska U:lla on jatkuva jakauma välillä $(0,1)$, on ylläolevan epäyhtälön oikea puoli nolla Lemman 4.4 nojalla, ja näin ollen $Q(U) = X$ todennäköisyydellä yksi. $\square$

5 Kopulaesityksen olemassaolo

Seuraava Sklarin lauseena tunnettu tulos vahvistaa, että mielivaltaisen $\mathbb{R}^n$:n satunnaisvektorin jakauma voidaan esittää kopulan avulla.

Lause 5.1. *Olkoon F jokin $\mathbb{R}^n$:n yhteiskertymäfunktio, jolla on reunakertymäfunktiot $F_1, \ldots, F_n$. Tällöin on olemassa kopula C, jolle pätee*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$$

kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $X = (X_1, \ldots, X_n)$ satunnaisvektori $\mathbb{R}^n$:ssä, jolla on kertymäfunktio F. Määritellään

$$U_i = \tilde{F}_i(X_i, V), \quad i = 1, \ldots, n,$$

missä $\tilde{F}_i$ on määritelty muokkaamalla reunakertymäfunktiota F_i kuten kaavassa (4.1) ja V on välillä $(0,1)$ tasaisesti jakautunut X:stä riippumaton satunnaismuuttuja. Toisin sanoen U_i on komponentin X_i yleistetty kertymämuunnos. Huomaa, että yleistettyjen kertymämuunnosten ylläolevassa konstruktiossa on käytetty samaa häiriötekijää V kaikille $i = 1, \dots, n$.

Olkoon

$$C(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{P}(U_1 \le u_1, \dots, U_n \le u_n)$$

satunnaisvektorin $(U_1, \dots, U_n)$ kertymäfunktio. Käyttämällä kvantiiliesityslausetta (Lause 4.1) havaitaan, että satunnaismuuttujat $U_1, \dots, U_n$ ovat tasajakautuneita välillä $(0,1)$, ja lisäksi $X_i = Q_i(U_i)$ melkein varmasti kaikilla i, missä Q_i on kertymäfunktiota F_i vastaava kvantiilifunktio. Lemmaa 3.1 hyödyntämällä näemme nyt, että kaikilla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \mathrm{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) \\ &= \mathrm{P}(Q_1(U_1) \le x_1, \dots, Q_n(U_n) \le x_n) \\ &= \mathrm{P}(U_1 \le F_1(x_1), \dots, U_n \le F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \end{aligned}$$

□

6 Kopulaesityksen yksikäsitteisyys

Lause 6.1. *Jos F on $\mathbb{R}^n$:n yhteiskertymäfunktio, jolla on jatkuvat reunakertymäfunktiot $F_1, \dots, F_n$, niin on olemassa täsmälleen yksi kopula, jolle pätee esitys (2.2).*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

7 Fréchet'n–Hoeffdingin estimaatit

Kertymäfunktioiden $F_1, \dots, F_n$ virittämä *Fréchet-luokka*

$$\Gamma(F_1, \dots, F_n)$$

on niiden $\mathbb{R}^n$:n yhteiskertymäfunktioiden kokoelma, joilla on reunakertymäfunktiot $F_1, \dots, F_n$. Seuraavan lauseen ala- ja ylärajat tunnetaan Fréchet'n[1] ja Hoefddingin[2] estimaatteina.

Lause 7.1. *Kullekin yhteiskertymäfunktiolle $F \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ pätee*

$$\max\left(1 - \sum_{k=1}^{n}(1 - F_k(x_k)),\ 0\right) \le F(x_1, \dots, x_n) \le \min(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

[1]Maurice Réne Fréchet (2.9.1878 Maligny, Ranska – 4.6.1973 Pariisi).

[2]Wassily Hoeffding (12.6.1914 Mustamäki, Suomen suuriruhtinaskunta – 28.2.1991 Chapel Hill, Pohjois-Carolina).

kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Todistus. Määritelmän mukaan F on jonkin satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_n)$ yhteiskertymäfunktio, missä komponentti X_k on jakatunut kertymäfunktion F_k mukaan. Koska

$$\mathrm{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) \;\le\; \mathrm{P}(X_k \le x_k) \;=\; F(x_k)$$

kaikilla k, näemme että yläraja pitää paikkansa.

Tarkastellaan seuraavaksi alarajaa. Tapauksessa $n = 1$ alaraja pätee selvästi — jopa yhtälönä. Edetäksemme induktiolla oletetamme, että alaraja pätee jollain indeksillä n. Olkoon F jokin $\mathbb{R}^{n+1}$:n yhteiskertymäfunktio ja olkoon $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ jokin satunnaisvektori, jonka yhteiskertymäfunktio F on. Tällöin

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) \;=\; G(x_1, \ldots, x_n) - \mathrm{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_{n+1} > x_{n+1}),$$

missä G on $\mathbb{R}^n$:ään projisoidun satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_n)$ yhteiskertymäfunktio. Koska

$$\mathrm{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_{n+1} > x_{n+1}) \;\le\; \mathrm{P}(X_{n+1} > x_{n+1}) \;=\; 1 - x_{n+1},$$

havaitsemme että

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) \;=\; G(x_1, \ldots, x_n) - (1 - x_{n+1}).$$

Koska $G \in \Gamma(F_1, \ldots, F_n)$, alarajan paikkansapitävyys F:lle seuraa induktio-oletuksesta. □

Lauseen 7.1 seurauksena saamme seuraavat Fréchet'n–Hoeffdingin kopulaestimaatit.

Lause 7.2. *Kullekin n-ulotteiselle kopulalle C pätee*

$$\max\left(1 - \sum_{k=1}^{n}(1 - u_k),\; 0\right) \;\le\; C(u_1, \ldots, u_n) \;\le\; \min(u_1, \ldots, u_n)$$

kaikilla $u_1, \ldots, u_n \in [0, 1]$.

Todistus. Väite seuraa välittömästi lauseesta 7.1, koska kaikki $\mathbb{R}^n$:n kopulat kuuluvat Fréchet-luokkaan $\Gamma(\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id})$, missä $\mathrm{id}(u) = u$ on välin $(0, 1)$ tasajakauman kertymäfunktio. □

Esimerkki 7.3 (Komonotonisuuskopula)**.** Olkoon U tasajakautunut satunnaismuuttuja välillä $(0, 1)$ ja olkoon C satunnaisvektorin $(U_1, \ldots, U_n)$ yhteiskertymäfunktio, missä $U_k = U$ kaikilla k. Tällöin

$$C(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{P}(U \le u_1, \ldots, U \le u_n) = \min\{u_1, \ldots, u_n\}.$$

Ylläoleva kopula siis saavuttaa Fréchet'n–Hoeffdingin ylärajan lauseessa 7.2.

Viitteet

[1] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative Risk Management.* Princeton University Press, 2005.

[2] L. Rüschendorf. On the distributional transform, Sklar's theorem, and the empirical copula process. *J. Statist. Plann. Inference*, 139(11):3921–3927, 2009.