Stokastiikan perusteet

Lasse Leskelä*

10. joulukuuta 2013

Tiivistelmä

Tämä luentomoniste sisältää muistiinpanoja asioista, joita käsiteltiin Jyväskylän yliopiston kurssilla *MATA280 Stokastiikan perusteet* syksyllä 2013.

Sisältö

*Postiosoite: Matematiikan ja tilastotieteen laitos, PL 35, 40014 Jyväskylän yliopisto Puh: 014 260 2728. URL: http://www.iki.fi/lsl/ Email: lasse.leskela@iki.fi

1 Todennäköisyysfunktio ja todennäköisyysmitta

1.1 Numeroituva joukko

Joukko Ω on *numeroituvasti ääretön*, jos sen alkiot voidaan numeroida luonnollisia lukuja käyttäen, eli jos on olemassa bijektio luonnollisten lukujen joukosta joukkoon Ω. Joukko Ω on *numeroituva*, jos se on äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Joukon Ω kokoa eli sen alkioiden lukumäärää merkitään symbolilla $|\Omega|$.

Esimerkki 1.1. Seuraavat joukot ovat numeroituvasti äärettömiä:

- luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,
- kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
- positiiviset kokonaisluvut $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$,
- rationaaliluvut $\mathbb{Q}$,
- mielivaltaisen numeroituvasti äärettömän joukon Ω ääretön osajoukko $\Omega_0 \subset \Omega$,
- mielivaltaisen numeroituvasti äärettömän joukon Ω karteesinen tulo $\Omega^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega\}$.

Esimerkki 1.2. Seuraavat joukot eivät ole numeroituvia:

- reaaliluvut $\mathbb{R}$,
- reaalilukujen yksikköväli $[0, 1]$,
- bittijonot $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \{0, 1\}\}$.

1.2 Todennäköisyysfunktio

Numeroituvan joukon Ω *todennäköisyysfunktio* on kuvaus $P : \Omega \to \mathbb{R}$, jolle

$$P(\omega) \geq 0 \quad \text{kaikilla } \omega \in \Omega \tag{1.1}$$

ja

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \tag{1.2}$$

Numeroituvan joukon todennäköisyysfunktiosta käytetään usein nimitystä *diskreetti todennäköisyysjakauma* tai lyhyesti vain *jakauma*. Jatkossa sana *todennäköisyys* usein lyhennetään *tn*.

Esimerkki 1.3. Äärellisen joukon Ω *tasajakauma* on kuvaus $P : \Omega \to \mathbb{R}$, jolle $P(\omega) = 1/|\Omega|$ kaikilla ω. Esimerkiksi symmetrisen nopan heittoa voidaan mallintaa joukon $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ tasajakaumalla ja symmetrisen kolikon heittoa joukon $\Omega = \{0, 1\}$ tasajakaumalla, missä '0' vastaa klaavaa ja '1' kruunaa. Vastaavasti viiden kortin pokerikättä voidaan mallintaa joukon $\Omega = K^{(5)}$ tasajakaumalla, missä $K^{(5)} = \{A \subset K : |A| = 5\}$ on korttipakan $K = \{1, 2, \ldots, 52\}$ viiden alkion suuruisten osajoukkojen kokoelma.

Tehtävä 1.4. Todista, että äärellisen joukon Ω tasajakauma on tn-funktio. Onko mahdollista määritellä joukon Ω tasajakauma, jos Ω on numeroituvasti ääretön?

Esimerkki 1.5. Olkoon H positiivinen funktio äärellisessä joukossa Ω. Määritellään

$$P(\omega) = Z^{-1} e^{-\beta H(\omega)}, \quad \omega \in \Omega,$$

missä $Z = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}$. Tn-funktio P on energiafunktion H määräämä *Gibbsin jakauma*. Luku $1/\beta$ vastaa monissa tilastollisen fysiikan malleissa lämpötilaa.

Tehtävä 1.6. Todista, että yllä määritelty Gibbsin jakauma todellakin on tn-funktio. Onko mahdollista määritellä Gibbsin jakauma, kun Ω on numeroituvasti ääretön?

1.3 Todennäköisyysmitta

Numeroituvaa kokelmaa joukkoja merkitään jatkossa useimmiten $(A_i)_{i \in I}$, missä $I \subset \mathbb{N}$ on äärellinen tai numeroituvasti äärellinen. Joukkoa I kutsutaan tässä yhtedydessä *indeksijoukoksi* ja sen alkioita *indekseiksi*. Yleensä $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, jolloin merkitään $(A_i)_{i \in I} = (A_i)_{i=1}^n$ tai $I = \{1, 2, \ldots\}$, jolloin merkitään $(A_i)_{i \in I} = (A_i)_{i=1}^\infty$. Kokoelma joukkoja $(A_i)_{i \in I}$ on *erillinen*, jos $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla indekseillä $i \neq j$. Tällöin sanotaan myös, että joukot $A_i, i \in I$, ovat *erilliset*.

Numeroituvan joukon Ω kaikkien osajoukkojen kokoelmaa merkitään 2^Ω. Kuvaus $\mathbb{P} : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ on joukon Ω *todennäköisyysmitta*, jos

$$\mathbb{P}(A) \ \geq \ 0 \tag{1.3}$$

kaikilla $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) \ = \ \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \tag{1.4}$$

kullekin numeroituvalle kokoelmalle $(A_i)_{i \in I}$ erillisiä Ω:n osajoukkoja, ja

$$\mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1. \tag{1.5}$$

Joukkoa Ω kutsutaan usein *otosavaruudeksi* ja sen alkoita *otoksiksi*. Kokoelmaa 2^Ω kutsutaan *tapahtuma-avaruudeksi* ja sen alkioita *tapahtumiksi*.

Lause 1.7. *Numeroituvan otosavaruuden mielivaltaiselle tn-mitalle pätee:*

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,

(iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,

(iv) $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$,

(v) $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$,

(vi) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

1.4 Tn-funktion ja tn-mitan vastaavuus

Olkoon P jokin numeroituvan otosavaruuden Ω tn-funktio. Tn-funktion P määräämä tn-mitta määritellään kaavalla

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad A \subset \Omega, \tag{1.6}$$

missä summaus tyhjän indeksijoukon yli tulkitaan nollaksi.

Vastaavasti, jos $\mathbb{P}$ on numeroituvan otosavaruuden Ω tn-mitta, niin sitä vastaava tn-funktio määritellään kaavalla

$$P(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega. \tag{1.7}$$

Lause 1.8. *Olkoon Ω numeroituva otosavaruus.*

(i) Jos P on tn-funktio, niin kaavassa (1.6) määritelty $\mathbb{P}$ on tn-mitta.

(ii) Jos $\mathbb{P}$ on tn-mitta, niin kaavassa (1.7) määritelty P on tn-funktio.

(iii) Kaavojen (1.6)–(1.7) määrittelemät kuvaukset $P \mapsto \mathbb{P}$ ja $\mathbb{P} \mapsto P$ muodostavat yksi yhteen -vastaavuuden Ω:n tn-funktioiden ja tn-mittojen välille.

Todistus. (i) Jos P on tn-funktio, niin on helppo tarkistaa, että kaavan (1.6) avulla määritelty kuvaus $\mathbb{P}$ toteuttaa ehdot (1.3) ja (1.5). Ehdon (1.4) varmistaminen onnistuu myös, kun muistetaan, että positiivisia termejä sisältävän summan arvo ei riipu summausjärjestyksestä. Näin ollen $\mathbb{P}$ on tn-mitta.

(ii) Harjoitustehtävä.

(iii) Jos P on tn-funktio, merkitään kaavan (1.6) määräämää kuvausta $\mathbb{P} = m(P)$. Tällöin m on kuvaus Ω:n tn-funktioilta Ω:n tn-mitoille. Vastaavasti merkitään symbolilla m' kaavan (1.7) määräämää kuvausta Ω:n tn-mitoilta Ω:n tn-funktioille. Yksi yhteen -vastaavuuden toteamiseksi riittää näyttää, että $m^{-1} = m'$. Tehdään tämä kahdessa vaiheessa.

Näytetään ensin, että $m(m'(\mathbb{P})) = \mathbb{P}$ kaikilla tn-mitoilla $\mathbb{P}$. Olkoon $\mathbb{P}$ jokin Ω:n tn-mitta, merkitään $P = m'(\mathbb{P})$ ja määritellään $\mathbb{Q} = m(P)$. Tällöin mielivaltaisella $A \subset \Omega$ pätee

$$\mathbb{Q}(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A),$$

missä viimeisessä yhtälössä käytettiin tn-mitan summakaavaa erilliselle numeroituvalle kokoelmalle $(\{\omega\})_{\omega \in A}$. Ylläolevan kaavan perusteella $m(m'(\mathbb{P})) = \mathbb{Q} = \mathbb{P}$.

Näytetään seuraavaksi, että $m'(m(P)) = P$ kaikilla tn-funktioilla P. Olkoon P jokin Ω:n tn-funktio ja merkitään $\mathbb{P} = m'(P)$ ja $Q = m(\mathbb{P})$. Tällöin jokaiselle $\omega \in \Omega$ pätee

$$Q(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega' \in \{\omega\}} P(\omega') = P(\omega).$$

Siispä $m(m'(P)) = Q = P$. Todetaan siis, että m ja m' ovat bijektoita ja toistensa käänteiskuvauksia. $\square$

Lauseen 1.8 perusteella numeroituvan otosavaruuden tn-funktiot ja tn-mitat vastaavat toisiaan yksi yhteen. Käytännön kannalta ainoa ero on, että tn-mitta $\mathbb{P}$ kertoo todennäköisyyden tapahtumalle $A \subset \Omega$, siinä missä tn-funktio P kertoo sen otokselle $\omega \in \Omega$. Voidaan kysyä, miksi saman asian (todennäköisyys) kvantifioimiseksi tarvitaan kaksi eri käsitettä. Vastaus on, että molemmilla on hyvät puolensa. Tn-funktiot ovat käytännön laskujen kannalta helpompia ja konkreettisempia käsitellä kuin tn-mitat, kun taas tn-mittojen avulla voidaan analysoida myös yleisempiä, ylinumeroituvia otosavaruuksia. Ominaisuudet (1.3)–(1.5) toteuttavaa kuvausta $\mathbb{P}$ kutsutaan tn-mitaksi myös yleisemmässä tapauksessa, missä Ω ei välttämättä ole numeroituva. Yleisten tn-mittojen analyysi vaatii kuitenkin huomattavasti mutkikkaampaa teoreettista koneistoa, eikä niitä sen vuoksi käsitellä tällä kurssilla.

1.5 Tn-funktioiden tulo

Joukkojen $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ *tulojoukko* eli karteesinen tulo on joukko

$$\Omega_1 \times \cdots \Omega_n = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i\}.$$

Tulojoukon alkiot ovat n:n pituisia vektoreita, joiden i:s komponentti ω_i kuuluu joukkoon Ω_i. Tulojoukosta tulosta käytetään usein myös nimitystä *tuloavaruus*.

Tn-funktioiden $P_1, \dots, P_n$ *tulo*, missä P_i on numeroituvan joukon Ω_i tn-funktio, määritellään kaavalla

$$(P_1 \times \cdots \times P_n)(\omega) = P_1(\omega_1)P_2(\omega_2)\cdots P_n(\omega_n), \tag{1.8}$$

missä $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

Lause 1.9. *Tn-funktioiden $P_1, \dots, P_n$ tulo on tulojoukon $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ tn-funktio.*

Todistus. Olkoon $P = P_1 \times \cdots P_n$ kaavassa (1.8) määritelty funktio. Koska positiivisten lukujen tulo on positiivinen, nähdään, että P toteuttaa ehdon (1.1). Pitää vielä näyttää, että P:lle pätee (1.2). Jälleen muistetaan, että positiivisia termejä summattaessa ei ole väliä, missä järjestyksessä summaukset tehdään. Näin havaitaan, että

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} P(\omega_1)\cdots P(\omega_n).$$

Luku $P(\omega_1)$ on summausindeksien $\omega_2, \dots, \omega_n$ näkökulmasta vakio. Tuomalla kyseinen vakio jälkimmäisten summien eteen nähdään, että

$$\begin{aligned}&\sum_{\omega_1\in\Omega_1} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} P(\omega_1)\cdots P(\omega_n)\\ &\qquad = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} P(\omega_1) \sum_{\omega_2\in\Omega_2} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} P(\omega_2)\cdots P(\omega_n).\end{aligned}$$

Toistamalla sama temppu seuraavaksi $P(\omega_2)$:lle ja jatkamalla näin huomataan, että

$$\sum_{\omega_1\in\Omega_1} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} P(\omega_1)\cdots P(\omega_n) = \Big(\sum_{\omega_1\in\Omega_1} P(\omega_1)\Big)\cdots\Big(\sum_{\omega_n\in\Omega_n} P(\omega_n)\Big).$$

Koska yllä jokainen oikean puolen termi on yksi, havaitaan tästä, että

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1.$$

Funktio $P : \Omega \to \mathbb{R}$ toteuttaa siis ehdot (1.1)–(1.2) ja on näin ollen tulojoukon Ω tn-funktio. $\square$

Esimerkki 1.10 (Tasajakaumien tulo)**.** Olkoon μ äärellisen joukon S tasajakauma, jolloin siis $\mu(s) = \frac{1}{|S|}$ kaikilla $s \in S$. Olkoon $\Omega = S^n$ ja $P = \mu \times \cdots \times \mu$ tn-funktion μ n-kertainen tulo itsensä kanssa. Tällöin

$$P(\omega) = \mu(\omega_1)\cdots\mu(\omega_n) = \left(\frac{1}{|S|}\right)^n$$

kaikilla $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in S^n$. Koska tuloavaruuden $\Omega = S^n$ koko on $|S|^n$, nähdään ylläolevasta laskelmasta, että

$$P(\omega) = \frac{1}{|S|^n} = \frac{1}{|S^n|} = \frac{1}{|\Omega|}$$

kaikilla $\omega \in \Omega$. Tasajakauman μ n-kertainen tulo on näin ollen tuloavaruuden Ω tasajakauma.

Tehtävä 1.11. Olkoon μ_1 äärellisen joukon S_1 tasajakauma ja μ_2 äärellisen joukon S_2 tasajakauma, missä joukot S_1 ja S_2 eivät välttämättä ole samankokoisia. Onko $\mu_1 \times \mu_2$ tällöin myös tasajakauma? Todista väite oikeaksi tai anna vastaesimerkki.

2 Satunnaismuuttuja

2.1 Satunnaismuuttujan tila-avaruus

Diskreetti todennäköisyysavaruus on pari (Ω, P), missä Ω on numeroituva otosavaruus ja P sen tn-funktio. Diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määritelty *satunnaismuuttuja* on kuvaus

$$X : \Omega \to S,$$

missä S on jokin joukko. Joukkoa S kutsutaan satunnaismuuttujan X *tila-avaruudeksi* ja joukon S alkioita satunnaismuuttujan X *tiloiksi*. Satunnaismuuttujaa X kutsutaan myös termeillä

- *satunnaisluku*, kun tila-avaruus on $\mathbb{R}$ tai sen osajoukko,
- *satunnainen kokonaisluku*, kun tila-avaruus on $\mathbb{Z}$ tai sen osajoukko,
- *satunnaisvektori*, kun tila-avaruus on jonkin joukon S tulojoukko S^n.

Esimerkki 2.1. Symmetristä kolikkoa heitetään 100 kertaa. Heittosarjan tulosta mallinnetaan otosavaruuden $\Omega = \{0, 1\}^{100}$ otoksella $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{100})$, missä $\omega_i = 1$ tarkoittaa, että i:s heitto on kruuna. Olkoon P otosavaruuden Ω tasajakauma, jolloin tulkitaan, että jokainen mahdollinen heittosarja on yhtä todennäköinen. Merkitään

- $X(\omega) = \sum_{j=1}^{10} \omega_j$,
- $Y(\omega) = \sum_{j=1}^{100} e^{-j} \omega_j$,
- $Z(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_{100})$.

Tällöin X, Y, Z ovat tn-avaruudella (Ω, P) määriteltyjä satunnaismuuttujia. Satunnainen kokonaisluku $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ kertoo, montako kruunaa kymmenellä ensimmäisellä heitolla saatiin. Satunnaisluku $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ kuvaa eksponentiaalisesti diskontatun tuoton heittopelissä, jossa jokainen kruuna tuottaa yhden heittäjälleen yhden euron, ja satunnaisvektori $Z : \Omega \to \{0,1\}^{100}$ kirjaa heittosarjan kaikki tapahtumat yhteen vektoriin.

Ylläolevasta esimerkistä nähdään, että käytännön kannalta satunnaismuuttujan tila-avaruus voidaan valita monella tapaa. Esimerkiksi satunnaismuuttujan X tila-avaruudeksi voidaan yhtä hyvin määritellä joukko $\{0, 1, \ldots, 10\}$ koko $\mathbb{Z}$:n sijaan. Toisaalta X:n tila-avaruuden voidaan myös tulkita olevan koko $\mathbb{R}$. Usein on luontevaa määritellä satunnaismuuttujan tila-avaruudeksi joukko $X(\Omega)$, joka sisältää kaikki mahdolliset X:n saamat arvot.

2.2 Satunnaismuuttujan jakauma

Jatkossa käytetään usein lyhennysmerkintää

$$\{X = s\} \;=\; \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}$$

tapahtumalle, että satunnaismuuttuja X saa arvon s ja lyhennysmerkintää

$$\{X \in A\} \;=\; \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

tapahtumalle, että X kuuluu joukkoon A. Hakasulut jätetään vasemmalta puolelta usein pois ja kirjoitetaan

$$\mathbb{P}(X = s) \;=\; \mathbb{P}(\{X = s\}) \;=\; \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}).$$

ja

$$\mathbb{P}(X \in A) \;=\; \mathbb{P}(\{X \in A\}) \;=\; \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Jälkimmäinen ylläoleva kaava voitaisiin myös kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)),$$

missä $X^{-1}(A)$ on kuvauksen X alkukuva joukolle A, mutta stokastiikassa tällaista merkintää nähdään harvemmin.

Diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määritellyn satunnaismuuttujan $X : \Omega \to S$ *jakauma* on kuvaus $P_X : S \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla

$$P_X(s) \;=\; \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}) \;=\; \sum_{\omega : X(\omega) = s} P(\omega), \quad s \in S. \tag{2.1}$$

Yllä $\mathbb{P}$ on tn-funktion P määräämä tn-mitta (kaava (1.6)). Usein käytetään intuitiivisempaa mutta epätäsmällisempää merkintää $P_X(s) = \mathbb{P}(X = s)$. Sanotaan, että satunnaismuuttuja X *noudattaa jakaumaa* μ, jos $P_X = \mu$.

Seuraavassa lauseessa näytetään, että diskreetillä tn-avaruudella määritellyn satunnaismuuttujan X jakauma on tila-avaruuden tn-funktio. Lauseessa tehdään lisäoletus, että tila-avaruus S on numeroituva. Tämä lisäoletus voidaan tarpeen vaatiessa tehdä korvaamalla mahdollisesti ylinumeroituva joukko S pienemällä joukolla $X(\Omega)$ sillä X:n mahdollisten arvojen joukko $X(\Omega)$ on aina numeroituva, kun Ω on numeroituva.

Lause 2.2. *Olkoon X diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määritelty satunnaismuuttuja, jonka tila-avaruus S on numeroituva. Tällöin X:n jakauma on tila-avaruuden S tn-funktio ja lisäksi*

$$\mathbb{P}(X \in A) \;=\; \sum_{s \in A} P_X(s) \quad \text{kaikilla } A \subset S. \tag{2.2}$$

Todistus. Todistetaan, että kaavassa (2.1) määritelty kuvaus $P_X : S \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot (1.1)–(1.2). Ehdon (1.1) vaatima positiivisuus on selvää, koska yhtälön (2.1) oikealla puolella kaikki summattavat ovat positiivisia. Ehdon (1.2) tarkastamiseksi merkitään symbolilla $A_s = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}$ tapahtumaa, että X saa arvon s. Tällöin havaitaan, että $(A_s)_{s \in S}$ on numeroituva kokoelma erillisiä tila-avaruuden S osajoukkoja. Näin ollen käyttämällä tn-mitan summakaavaa (1.4) ja yhtälöä (2.1) havaitaan, että

$$\mathbb{P}(\cup_{s \in S} A_s) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(A_s) = \sum_{s \in S} P_X(s).$$

Koska lisäksi $\cup_{s \in I} A_s = \Omega$, voidaan tästä päätellä, että

$$\sum_{s \in S} P_X(s) = 1.$$

□

2.3 Satunnaismuuttujan muunnoksen jakauma

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja $\mathbb{P}$ tn-funktiota P vastaava tn-mitta. Olkoon $X : \Omega \to S$ satunnaismuuttuja ja $f : S \to T$ funktio, missä S ja T ovat mielivaltaisia numeroituvia joukkoja. Tällöin satunnaismuuttuja $f(X) : \Omega \to T$ määritellään kaavalla

$$(f(X))(\omega) = f(X(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Lause 2.3. *Satunnaismuuttujan $f(X)$ jakauma saadaan X:n jakaumasta kaavalla*

$$P_{f(X)}(t) \;=\; \sum_{s : \in f(s) = t} P_X(s), \quad t \in T.$$

Jos f on bijektio, niin ylläoleva lauseke voidaan sieventää muotoon

$$P_{f(X)}(t) \;=\; P_X(f^{-1}(t)), \quad t \in T.$$

Todistus. Valitaan jokin $t \in T$ ja merkitään $f^{-1}\{t\} = \{s \in S : f(s) = t\}$. Koska $f(s) = t \iff s \in f^{-1}\{t\}$, päätellään, että

$$\{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) = t\} \;=\; \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}\{t\}\}.$$

Näin ollen

$$P_{f(X)}(t) \;=\; \mathbb{P}(f(X) = t) \;=\; \mathbb{P}(X \in f^{-1}\{t\}) \;=\; \sum_{s \in f^{-1}\{t\}} P_X(s),$$

missä viimeisen yhtälön kohdalla sovellettiin Lauseen 2.2 kaavaa (2.2). Ensimmäinen väite seuraa tästä.

Jälkimmäisen väitteen näyttämiseksi riittää todeta, että kun f on bijektio, joukko $f^{-1}\{t\}$ sisältää täsmälleen yhden alkion $f^{-1}(t)$. $\square$

Esimerkki 2.4. Pelataan noppapeliä, jossa pelaajan saama tuotto yhdellä pelikierroksella on nopaheiton silmäluku potenssiin kaksi. Miten pelikierroksen tuotto on jakautunut?

Mallinnetaan nopanheiton silmälukua satunnaismuuttujalla X, joka noudattaa joukon $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ tasajakaumaa. Tällöin pelikierroksen tuotto on satunnaismuuttuja X^2, joka saa arvoja joukossa $T = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$. Koska $t \mapsto t^2$ on bijektio joukosta S joukkoon T, saadaan satunnaismuuttujan X^2 jakauma Lauseen 2.3 avulla laskettua muodossa

$$P_{X^2}(t) = P_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{6}, \quad t \in T.$$

Pelikierroksen tuotto noudattaa näin ollen tasajakaumaa joukossa T.

Todetaan vielä, että pelikierroksen tuotto voidaan luontevasti myös tulkita satunnaismuuttujaksi isommassa tila-avaruudessa $T' = \{1, 2, \dots, 36\}$. Tällöin kuvaus $t \mapsto t^2$ *ei* ole bijektio joukosta S joukkoon T'. Satunnaismuuttujan X^2 jakauma tila-avaruudessa T' voidaan selvittää Lauseen 2.3 ensimmäisen kaavan avulla. Nyt havaitaan, että

$$f^{-1}\{t\} = \begin{cases} \{\sqrt{t}\}, & t \in T, \\ \emptyset, & t \in T' \setminus T. \end{cases}$$

Tästä päätellään, että

$$P_{X^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & t \in T, \\ 0, & t \in T' \setminus T. \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan jakauman määrittämisessä pitää näin ollen aina muistaa mainita tila-avaruus. Tämän esimerkin satunnaismuuttuja X^2 noudattaa joukon $T = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ tasajakaumaa, kun se määritellään kuvauksena $\Omega \to T$, mutta isompaan tila-avaruuteen T' määriteltynä X^2 ei enää ole tasajakautunut.

Esimerkki 2.5. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ satunnaisvektori tila-avaruudessa $S = \{0, 1, \ldots, n\}^2$, joka noudattaa jakaumaa $P_X = \mu \times \nu$, missä μ ja ν ovat joukon $\{0, 1, \ldots, n\}$ tn-funktioita. Mikä on tällöin satunnaismuuttujan $X_1 + X_2$ jakauma?

Satunnaismuuttuja $X_1 + X_2$ saa arvoja joukossa $T = \{0, 1, \ldots, 2n\}$. Määritellään kuvaus $f : S \to T$ kaavalla $f(s) = s_1 + s_2$. Tällöin

$$X_1 + X_2 = f(X)$$

ja Lauseen 2.3 perusteella

$$P_{X_1+X_2}(k) = \sum_{(i,j):f(i,j)=k} (\mu \times \nu)(i, j), \quad 0 \le k \le 2n.$$

Tn-funktioiden tulon määritelmän (ks. Luku 1.5) mukaan tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_{X_1+X_2}(k) \;=\; \sum_{(i,j):i+j=k} \mu(i)\nu(j) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \mu(i)\nu(k-i), \quad 0 \le k \le 2n.$$

Ylläolevan kaavan oikeanpuolimmainen lauseke tunnetaan nimellä tn-funktioiden μ ja ν *konvoluutio*.

3 Stokastinen riippuvuus ja riippumattomuus

3.1 Tulojoukon jakauman reunajakaumat

Olkoon $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ numeroituvien joukkojen $S_1, \ldots, S_n$ muodostama tulojoukko ja μ sen jakauma eli tn-funktio. Kyseisen jakauman i:s *reunajakauma* μ_i määritellään kaavalla

$$\mu_i(s_i) \;=\; \sum_{t \in S: t_i = s_i} \mu(t), \quad s_i \in S_i.$$

Tehtävä 3.1. Todista, että μ_i on S_i:n tn-funktio.

Esimerkki 3.2 (Tulojoukon tasajakauma)**.** Olkoon μ äärellisten joukkojen S_1 ja S_2 tulojoukon $S = S_1 \times S_2$ tasajakauma. Tällöin siis $\mu(s_1, s_2) = 1/|S|$ kaikilla $s_1 \in S_1$ ja $s_2 \in S_2$. Jakauman μ ensimmäinen reunajakauma on

$$\mu_1(s_1) = \sum_{s_2 \in S_2} \mu(s_1, s_2) = \sum_{s_2 \in S_2} \frac{1}{|S|} = \frac{|S_2|}{|S|} = \frac{|S_2|}{|S_1||S_2|} = \frac{1}{|S_1|}.$$

Samanlaisen laskun avulla nähdään, että μ:n toinen reunajakauma on

$$\mu_2(s_2) = \frac{1}{|S_2|}.$$

Tulojoukon $S_1 \times S_2$ tasajakauman reunajakaumat ovat siis joukkojen S_1 ja S_2 tasajakaumat.

3.2 Satunnaisvektorin reunajakaumat

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ joidenkin numeroituvien joukkojen $S_1, \ldots, S_n$ muodostama tuloavaruus. Olkoon $X : \Omega \to S$ satunnaisvektori ja olkoon X_i sen i:s komponentti. Tällöin siis

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega$$

ja $X_i : \Omega \to S_i$ on S_i-arvoinen satunnaismuuttuja. Seuraavaksi tarkastellaan kahta tärkeää kysymystä:

(i) Voidaanko satunnaisvektorin X komponenttien jakaumat voidaan selvittää X:n jakaumasta?

(ii) Voidaanko X:n jakauma selvittää sen komponenttien jakaumista?

Tarkastellaan ensiksi kysymystä (i). Olkoon X jokin S-arvoinen satunnaisvektori ja merkitään sen jakaumaa

$$P_X(s) = \mathbb{P}(X = s), \quad s \in S.$$

Koska oletimme, että S_i:t ovat numeroituvia, on tila-avaruus S myös numeroituva. Näin ollen P_X on numeroituvan tila-avaruuden S tn-funktio (Lause 2.2).

Lause 3.3. *Satunnaisvektorin $X = (X_1, \ldots, X_n)$ i:nnen komponentin jakauma on X:n jakauman i:s reunajakauma, eli X_i:n jakauma saadaan X:n jakaumasta kaavalla*

$$P_{X_i}(s_i) = \sum_{t \in S : t_i = s_i} P_X(t), \quad s_i \in S_i.$$

Todistus. Olkoon $\pi_i : S \to S_i$ tuloavaruuden $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ i:s projektiokuvaus, jolloin

$$\pi(s) = s_i \quad \text{kaikilla } s = (s_1, \ldots, s_n) \in S.$$

Tällöin satunnaisvektorin X i:s komponentti voidaan kirjoittaa muodossa

$$X_i = \pi_i(X)$$

ja Lauseen 2.3 avulla havaitaan, että

$$P_{X_i}(s_i) = \sum_{t : \pi_i(t) = s_i} P_X(t) = \sum_{t : t_i = s_i} P_X(t).$$

□

Tarkastellaan sitten kysymystä (ii), eli oletetaan, että tunnetaan satunnaisvektorin $X = (X_1, \ldots, X_n)$ komponenttien jakaumat $P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}$. Voidaanko X:n jakauma selvittää kyseisistä jakaumista? Vastaus on *ei*, kuten seuraava esimerkki valaisee.

Esimerkki 3.4. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ satunnaisvektori tila-avaruutenaan $\{0,1\}^2$. Oletetaan, että X:n jakauma P_X on tulojoukon $\{0,1\}^2$ tasajakauma. Lauseen 3.3 ja Esimerkin 3.2 perusteella sekä X_1 että X_2 noudattavat joukon $\{0,1\}$ tasajakaumaa. Määritellään satunnaisvektori Y kaavalla $Y = (X_1, X_1)$. Tällöin siis

$$Y_1(\omega) = X_1(\omega) \quad \text{ja} \quad Y_2(\omega) = X_1(\omega)$$

kaikilla otoksilla ω. Määritelmästä seuraa, että Y:n komponenttien jakaumat ovat $P_{Y_1} = P_{X_1}$ ja $P_{Y_2} = P_{X_1} = P_{X_2}$. Siispä Y:n komponenttien jakaumat ovat samat kuin X:n komponenttien jakaumat.

Lasketaan seuraavaksi Y:n jakaumat arvot. Suoraan määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
P_Y(0,0) &= \mathbb{P}(Y_1 = 0,\ Y_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_1 = 0) = \frac{1}{2},\\
P_Y(0,1) &= \mathbb{P}(Y_1 = 0,\ Y_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_1 = 1) = 0,\\
P_Y(1,0) &= \mathbb{P}(Y_1 = 1,\ Y_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0,\\
P_Y(1,1) &= \mathbb{P}(Y_1 = 1,\ Y_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Havaitaan, että satunnaisvektorien X ja Y jakaumat poikkeavat toisistaan, vaikka niiden komponentit ovat samoin jakautuneita.

Ylläolevasta esimerkistä nähdään, että satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_n)$ jakauma sisältää enemmän informaatiota kuin mitä sen komponenttiensa jakaumista voidaan päätellä. Tämä lisäinformaatio on kyseisen satunnaisvektorin stokastinen *riippuvuusrakenne*, joka kertoo miten satunnaisvektorin komponentit $X_1, \ldots, X_n$ tilastollisesti riippuvat toisistaan. Tästä lisää seuraavissa alaluvuissa.

3.3 Riipumattomat satunnaismuuttujat

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja $\mathbb{P}$ tn-funktiota P vastaava tn-mitta. Olkoot $X_i : \Omega \to S_i$ satunnaismuuttujia, $i = 1, \ldots, n$, missä tila-avaruudet $S_1, \ldots, S_n$ ovat numeroituvia. Satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat *riippumattomat*, jos

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \;=\; \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n) \tag{3.1}$$

kaikilla $A_1 \subset S_1, \ldots, A_n \subset S_n$.

Lause 3.5. *Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) $X_1, \ldots, X_n$ *ovat riippumattomat.*

(ii) *Kaikilla* $s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n$ *pätee*

$$\mathbb{P}(X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) \;=\; \mathbb{P}(X_1 = s_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = s_n).$$

(iii) *Satunnaisvektorin* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *jakauma on komponenttiensa jakaumien tulo, eli*

$$P_X = P_{X_1} \times \cdots P_{X_n}.$$

Todistus. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Tämä nähdään valitsemalla $A_i = \{s_i\}$ kaavassa (3.1).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Valitaan $s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n$ ja merkitään $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Satunnaisvektorin jakauman määritelmän ja (ii):n mukaan

$$\begin{aligned}
P_X(s) &= \mathbb{P}(X = s) \\
&= \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) = (s_1, \ldots, s_n)) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = s_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = s_n) \\
&= P_{X_1}(s_1) \cdots P_{X_n}(s_n).
\end{aligned}$$

Ominaisuuden (iii) paikkansapitävyys seuraa, koska tn-funktioiden tulon määritelmän mukaan

$$(P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n})(s) = P_{X_1}(s_1) \cdots P_{X_n}(s_n).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Valitaan $A_1 \subset S_1, \ldots, A_n \subset S_n$ ja merkitään $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Tällöin

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{s \in A} P_X(s).$$

Toisaalta (iii):n nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in A} P_X(s) &= \sum_{s_1 \in A_1} \cdots \sum_{s_n \in A_n} P_X(s_1, \ldots, s_n) \\
&= \sum_{s_1 \in A_1} \cdots \sum_{s_n \in A_n} P_{X_1}(s_1) \cdots P_{X_n}(s_n) \\
&= \left(\sum_{s_1 \in A_1} P_{X_1}(s_1) \right) \cdots \left(\sum_{s_1 \in A_1} P_{X_1}(s_1) \right).
\end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä kaavat todetaan, että

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \;=\; \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots, \mathbb{P}(X_n \in A_n),$$

joten $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat. $\square$

3.4 Riipumattomien satunnaismuuttujien olemassaolo

Seuraava tärkeä tulos kertoo, miten rakennetaan annettuja jakaumia $\mu_1, \ldots, \mu_n$ vastaavat riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ja niitä kannattelevan todennäköisyysavaruus.

Lause 3.6. *Olkoon μ_i numeroituvan avaruuden S_i tn-funktio, $i = 1, \ldots, n$. Tällöin on olemassa diskreetti tn-avaruus (Ω, P) ja sillä määritellyt satunnaismuuttujat $X_i : \Omega \to S_i$, joille pätee:*

(i) X_i noudattaa jakaumaa μ_i kaikilla $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $X_1, \ldots, X_n$ ovat keskenään riippumattomat.

Todistus. Määritellään $\Omega = S_1 \times \cdots \times S_n$, $P = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ ja satunnaismuuttujat $X_i : \Omega \to S_i$ kaavalla

$$X_i(\omega) = \omega_i, \quad \omega \in \Omega.$$

Tällöin P on Ω:n tn-funktio (Lause 1.9), joten (Ω, P) on diskreetti tn-avaruus. Todistetaan seuraavaksi, että satunnaismuuttuujat $X_1, \ldots, X_n$ toteuttavat ehdot (i)–(ii).

Olkoon $\mathbb{P}$ tn-funktiota P vastaava Ω:n tn-mitta ja määritellään satunnaisvektori $X : \Omega \to S_1 \times \cdots \times S_n$ kaavalla

$$X(\omega) = \omega, \quad \omega \in \Omega.$$

Tällöin satunnaisvektorin X jakaumalle pätee

$$P_X(s) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = s\}) = \mathbb{P}(\{s\}) = P(s), \quad s \in S_1 \times \cdots \times S_n.$$

Havaitaan siis, että satunnaisvektorin X jakauma on tn-funktio P. Tästä seuraa, että

$$\mathbb{P}(X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) \;=\; \mu_1(s_1) \cdots \mu_n(s_n).$$

Summaamalla ylläolevan yhtälöt molemmat puolet muuttujien $s_2, \ldots, s_n$ suhteen nähdään, että

$$\mathbb{P}(X_1 = s_1) \;=\; \mu_1(s_1),$$

joten X_1:n jakauma on μ_1. Samaan tapaan nähdään, että X_i:n jakauma on μ_i kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Koska X noudattaa jakaumaa $P = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$, todetaan, että

$$P_X = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n = P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n}.$$

Näin ollen Lauseen 3.5 perusteella satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat. $\square$

Nyt osaamme rakentaa riippumattomia satunnaismuuttujia vastaavan tn-avaruuden. Miten rakennetaan vastaava tn-avaruus riippuville satunnaismuuttujille? Käytännössä riippuvia satunnaismuuttujia rakennetaan riippumattomien satunnaismuuttujien funktioina. Riippumattomat satunnaismuuttujat ovat stokastiikan rakennuspalikoita, joista yleensä muodostetaan loput satunnaismuuttujat.

3.4.1 Riippumattomuuden säilyminen

Olkoot $X : \Omega \to S_1$ ja $Y : \Omega \to S_2$ diskreetillä tn-avaruudella määriteltyjä satunnaismuuttujia. Olkoot $f : S_1 \to T_1$ ja $g : S_2 \to T_2$ mielivaltaisia funktioita.

Lause 3.7. *Jos X ja Y ovat riippumattomat, niin tällöin myös $f(X)$ ja $g(Y)$ ovat riippumattomat.*

Todistus. Valitaan $t_1 \in T_1$ ja $t_2 \in T_2$. Tällöin riippumattomuuden määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f(X) = t_1,\, g(Y) = t_2) &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}\{t_1\},\, Y \in g^{-1}\{t_2\}) \\ &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}\{t_1\})\, \mathbb{P}(Y \in g^{-1}\{t_2\}) \\ &= \mathbb{P}(f(X) = t_1)\, \mathbb{P}(g(Y) = t_2). \end{aligned}$$

Lauseen 3.5 avulla tästä seuraa $f(X)$:n ja $g(Y)$:n riippumattomuus. □

Tehtävä 3.8. Olkoot X_1, X_2, X_3 diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määriteltyjä satunnaisia kokonaislukuja. Ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua? Todista väittämät oikeiksi tai perustele ne vääriksi antamalla vastaesimerkki.

(a) Jos satunnaismuuttujat X_1, X_2, X_3 ovat keskenään riippumattomat, niin tällöin myös satunnaismuuttujat X_i, X_j ovat keskenään riippumattomat kaikilla $i \neq j$.

(b) Jos X_i, X_j ovat keskenään riippumattomat kaikilla $i \neq j$, niin tällöin myös X_1, X_2, X_3 ovat keskenään riippumatomat.

Tehtävä 3.9. Olkoot B_1 ja B_2 riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia joukossa $\{0, 1\}$. Määritellään $X = \min\{B_1, B_2\}$ ja $Y = \max\{B_1, B_2\}$. Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippuvia vai riippumattomia? Perustele vastauksesi tarkasti.

Tehtävä 3.10. Olkoot $X : \Omega \to S$ ja $Y : \Omega \to T$ satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{P}(X = s) > 0$ kaikilla $s \in S$. Todista, että X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos

$$\mathbb{P}(Y = t \,|\, X = s) \;=\; \mathbb{P}(Y = t)$$

kaikilla $s \in S$ ja $t \in T$.

3.5 Ehdollinen todennäköisyys

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja $\mathbb{P}$ tn-funktiota P vastaava tn-mitta. Jos $\mathbb{P}(A) > 0$, tapahtuman $B \subset \Omega$ todennäköisyys ehdolla A määritellään kaavalla

$$\mathbb{P}(B \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Jos $\mathbb{P}(A) = 0$, todennäköisyyksiä ehdolla A ei ole mielekästä määritellä.

Tehtävä 3.11. Todista, että $B \mapsto \mathbb{P}(B \,|\, A)$ on otosavaruuden Ω tn-mitta.

Olkoon $(X, Y) : \Omega \to S_1 \times S_2$ diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määritelty satunnaisvektori ja oletetaan, että tila-avaruudet S_1, S_2 ovat numeroituvia.

Lause 3.12. *Olkoon $x \in S_1$ sellainen, että $P_X(x) > 0$. Tällöin tapahtuman $\{Y = y\}$ todennäköisyys ehdolla $\{X = x\}$ voidaan laskea (X, Y):n ja X:n jakaumien avulla kaavasta*

$$\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x) \;=\; \frac{P_{(X,Y)}(x, y)}{P_X(x)}. \tag{3.2}$$

Lisäksi kuvaus $y \mapsto \mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x)$ on joukon S_2 tn-funktio.

Todistus. Merkitään $A = \{\omega : X(\omega) = x\}$ ja $B = \{\omega : Y(\omega) = y\}$. Tällöin $A \cap B = \{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) = (x, y)\}$, joten

$$\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) \;=\; P_{(X,Y)}(x, y).$$

Koska lisäksi $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(A) = P_X(x)$, voidaan päätellä, että

$$\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x) \;=\; \mathbb{P}(B \,|\, A) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \;=\; \frac{P_{(X,Y)}(x, y)}{P_X(x)}.$$

Siispä (3.2) pitää paikkansa.

Jälkimmäisen väittämän toteen näyttämiseksi todetaan Lauseen 3.3 avulla, että X:n jakauma on (X, Y):n ensimmäinen reunajakauma, joka saadaan kaavasta

$$P_X(x) = \sum_{y \in S_2} P_X(x, y).$$

Nyt kaavaa (3.2) käyttämällä nähdään, että

$$\sum_{y \in S_2} \mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x) \;=\; \frac{\sum_{y \in S_2} P_{(X,Y)}(x, y)}{P_X(x)} \;=\; \frac{P_X(x)}{P_X(x)} \;=\; 1.$$

$\square$

3.6 Riippumaton satunnaisjono

Monissa tosimaailman ilmiöissä ei ole luonnollista ylärajaa satunnaisvektorin pituudelle. Esimerkiksi satunnainen opiskelija voi käydä uusimassa tietyn kurssin tentin periaatteessa rajattoman monta kertaa. Tällaisia ilmiöitä on luontevinta mallintaa käyttäen numeroituvasti ääretöntä kokoelmaa riippumattomia satunnaismuuttujia $X_1, X_2, X_3, \dots$. Jos kyseiset satunnaismuuttujat saavat arvoja numeroituvassa tila-avaruudessa S, on luontevaa tulkita satunnaisjono $X = (X_1, X_2, \dots)$ satunnaismuuttujaksi, jonka tila-avaruus on ääretön tulojoukko $S^\infty = S \times S \times \cdots$ Ongelmana on, että joukko S^∞ ei enää ole numeroituva toisin kuin S^n, ei vaikka rajoituttaisiin äärelliseen pohjajoukkoon S. Ylinumeroituvan joukon stokastiikka on teknisesti hankalaa, koska tällaisen joukon todennäköisyyksiä ei voida esittää tn-funktion avulla. Tn-mitan avulla todennäköisyydet voidaan esittää, mutta tällöinkään ei vältytä teknisiltä hankaluuksilta. Ylinumeroituvan joukon Ω tn-mittaa ei nimittäin yleensä voida määritellä kaikille Ω:n osajoukoille, vaan joudutaan rajoittumaan johonkin pienempään osajoukkojen kokoelmaan. Näitä asioita käsitellään tarkemmin tn-teorian kursseilla. Tämän kurssin puitteissa tyydytään muotoilemaan seuraava tulos ilman todistusta.

Yleinen tn-avaruus on kolmikko $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, missä

- otosavaruus Ω on jokin, ei välttämättä numeroituva, joukko,
- tapahtuma-avaruus $\mathcal{A}$ on kokoelma otosavaruuden osajoukkoja, jolle pätee:
  - $\Omega \in \mathcal{A}$,
  - $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,
  - $A_i \in \mathcal{A}, i \in I \implies \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, I numeroituva
- kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ on tn-mitta

Lisäksi sanotaan, kun S on numeroituva, että $X : \Omega \to S$ on yleisellä tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ määritelty S-arvoinen satunnaismuuttuja, jos $\{X = s\} \in \mathcal{A}$ kaikilla $s \in S$.

Yleisesti määritellään, että mielivaltainen kokoelma $(X_i)_{i \in I}$ satunnaismuuttujia on *riippumaton*, jos kokoelma $(X_i)_{i \in I_0}$ on riippumaton kaikilla äärellisillä $I_0 \subset I$. Seuraava tulos on Lauseen 3.6 yleistys äärettömille jonoille.

Lause 3.13. *Olkoot μ_i numeroituvien tila-avaruuksien S_i tn-funktioita, $i = 1, 2, \dots$ Tällöin on olemassa yleinen tn-avaruus $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ja sillä määritellyt keskenään riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \dots$, missä X_i noudattaa jakaumaa μ_i kaikilla $i = 1, 2, \dots$*

Todistus. Todistus sivuutetaan tämän kurssin puitteissa. Todistuksen voi lukea esim. Kallenbergin kirjasta [4, Theorem 3.19]. Ennen kyseisen todistuksen lukemista lukijaa kuitenkin suositellaan käymään mitta- ja integraaliteorian syventävä kurssi. □

4 Odotusarvo

4.1 Satunnaisluvun odotusarvo

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja $\mathbb{P}$ tn-funktiota P vastaava tn-mitta. Positiivisen satunnaisluvun $X : \Omega \to S \subset \mathbb{R}_+$ *odotusarvo* määritellään kaavalla

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega). \tag{4.1}$$

Tämä luku voi olla äärellinen tai ääretön. Saman kaavan avulla halutaan määritellä odotusarvo myös tapauksessa, missä X voi saada negatiivisia arvoja. Jos otosavaruus Ω on äärellinen, näin voidaankin tehdä. Mutta numeroituvasti äärettömän otosavaruuden tapauksessa yhtälön (4.1) oikea puoli ei välttämättä ole hyvin määritelty tai voi käydä niin, että oikea puoli saa eri arvoja riippuen summausjärjestyksestä. Tästä syystä määritellään, että reaaliarvoisella satunnaisluvulla $X : \Omega \to S \subset \mathbb{R}$ *on odotusarvo*, jos

$$\mathbb{E}|X| = \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\omega) < \infty.$$

Jos reaaliarvoisella satunnaisluvulla X on odotusarvo, yhtälön (4.1) oikea puoli suppenee itseisesti ja on näin ollen hyvin määritelty reaaliluku, jonka arvo ei riipu summausjärjestyksestä. Reaaliarvoisen satunnaisluvun X, jolla on odotusarvo, odotusarvo määritellään kaavalla (4.1).

Esimerkki 4.1 (Pietarin paradoksi)**.** Kasinolla on tarjolla rahapeli, jossa potissa on aluksi yksi euro ja sitten heitetään kolikkoa, kunnes saadaan klaava. Potin arvo tuplaantuu aina kun saadaan kruuna ja peli päättyy, kun klaava ilmestyy ensimmäisen kerran. Pelin päättyessä pelaaja saa potin itselleen. Olisitko valmis maksamaan 100 eur oikeudesta osallistua kyseiseen peliin? Mikä on kyseisen pelioikeuden käypä arvo?

Mallinnetaan tilannetta otosavaruudella $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, missä otos ω kuvaa pelin kestoa eli heittokierrosten määrää, kunnes ensimmäinen klaava ilmestyy. Jos kolikonheittosarja tuottaa $\omega - 1$ kruunaa ja kierroksella ω klaavan, pelaaja voittaa $2^{\omega-1}$ euroa. Pelaajan voittama tuotto on siis positiivinen satunnaisluku $V(\omega) = 2^{\omega-1}$. Lisäksi otoksen ω todennäköisyys on $P(\omega) = (\frac{1}{2})^\omega$. Näin ollen pelin tuoton odotusarvo on

$$\mathbb{E}V = \sum_{\omega \in \Omega} V(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{\omega-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega} = \infty.$$

Rationaalinen pelaaja, joka päättää osallistumisestaan rahapeliin sillä perusteella, ylittääkö pelin tuoton odotusarvo osallistumismaksun, on näin ollen halukas aina osallistumaan tähän rahapeliin, olipa pelin osallistumismaksu miten suuri hyvänsä.

Käytännön tilanteissa tulee usein tarve tarkastaa, onko jollakin reaaliarvoisella satunnaisluvulla odotusarvo vai ei. Suora tapa on laskea kyseisen satunnaisluvun itseisarvon odotusarvo ja tarkastaa, onko se äärellinen. Tämä voi kuitenkin olla usein turhan hidasta. Seuraava tulos tarjoaa tähän usein toimivan oikotien. Satunnaisluku X on *rajoitettu*, jos on olemassa positiivinen vakio c, jolle $|X(\omega)| \le c$ kaikilla $\omega \in \Omega$.

Lause 4.2. *Jokaisella rajoitetulla satunnaisluvulla on odotusarvo.*

Todistus. Väite nähdään suoraan arvioimalla

$$\mathbb{E}|X| = \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)| P(\omega) \le \sum_{\omega\in\Omega} c P(\omega) = c < \infty.$$

□

4.2 Odotusarvon laskeminen jakauman avulla

Odotusarvoja ei yleensä lasketa suoraan määritelmästä (4.1), vaan käyttämällä satunnaisluvun jakaumaa. Alla oleva tulos kertoo, miten tämä tehdään.

Lause 4.3. *Olkoon $X : \Omega \to S \subset \mathbb{R}$ satunnaisluku jakaumanaan P_X.*

(i) Jos X on positiivinen eli $S \subset \mathbb{R}_+$, niin X:n odotusarvo saadaan kaavasta

$$\mathbb{E}X = \sum_{s\in S} s P_X(s) \tag{4.2}$$

(ii) Jos X on reaaliarvoinen, X:llä on odotusarvo, jos ja vain jos

$$\sum_{s\in S} |s| P_X(s) < \infty, \tag{4.3}$$

ja tällöin X:n odotusarvo saadaan kaavasta (4.2).

Todistus. Molemmat väitteet seuraavat suoraan soveltamalla alla todistettua yleisempää Lausetta 4.5 identtiselle kuvaukselle $f(s) = s$. □

Esimerkki 4.4. Olkoon X tasajakautunut satunnaisluku äärellisessä joukossa $X(\Omega) = S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Tällöin X on rajoitettu, koska sen arvojoukko on äärellinen. Näin ollen (Lause 4.2) X:llä on odotusarvo ja se saadaan X:n jakaumasta kaavallla (4.2). Koska $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$ kaikilla i,

$$\mathbb{E}X = \sum_{s\in S} s\, P_X(s) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Nähdään siis, että X:n odotusarvo on lukujoukon $\{x_1, \dots, x_n\}$ aritmeettinen keskiarvo.

4.3 Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Seuraavassa lauseessa tila-avaruuden S ei tarvitse olla reaalilukujen osajoukko. Se voi olla esim. vektoriavaruus.

Lause 4.5. *Olkoon $X : \Omega \to S$ satunnaismuuttuja numeroituvassa tila-avaruudessa S ja $f : S \to \mathbb{R}$ jokin kuvaus.*

(i) Jos $f : S \to \mathbb{R}_+$, niin positiivisen satunnaisluvun $f(X)$ odotusarvo saadaan kaavasta

$$\mathbb{E}f(X) \;=\; \sum_{s\in S} f(s)P_X(s) \tag{4.4}$$

(ii) Jos $f : S \to \mathbb{R}$, niin reaaliarvoisella satunnaisluvulla $f(X)$ on odotusarvo, jos ja vain jos

$$\sum_{s\in S} |f(s)|P_X(s) < \infty, \tag{4.5}$$

ja tällöin $f(X)$:n odotusarvo saadaan kaavasta (4.4).

Todistus. (i) Oletetaan, että $f : S \to \mathbb{R}_+$. Olkoon $X^{-1}\{s\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}$ tapahtuma, että X saa arvon $s \in S$. Tällöin $(X^{-1}\{s\})_{s\in S}$ on numeroituva kokoelma erillisiä tapahtumia ja

$$\bigcup_{s\in S} X^{-1}\{s\} = \Omega.$$

Tällaista kokelmaa kutsutaan otosavaruuden *ositukseksi*. Koska positiivisten termien summa ei riipu summausjärjestyksestä, havaitaan, että

$$\sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))P(\omega) = \sum_{s\in S}\sum_{\omega\in X^{-1}\{s\}} f(X(\omega))P(\omega).$$

Koska $X(\omega) = s$ kaikilla $s \in X^{-1}\{s\}$, voidaan ylläolevan yhtälön oikea puoli kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\sum_{s\in S}\sum_{\omega\in X^{-1}\{s\}} f(X(\omega))P(\omega) &= \sum_{s\in S} f(s) \sum_{\omega\in X^{-1}\{s\}} P(\omega)\\ &= \sum_{s\in S} f(s)\,\mathbb{P}(X^{-1}\{s\}).\end{aligned}$$

Havaitsemalla, että $\mathbb{P}(X^{-1}\{s\}) = P_X(s)$, voidaan päätellä, että

$$\sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))P(\omega) = \sum_{s\in S} f(s)P_X(s).$$

Kohdan (i) väite seuraa tästä.

(ii) Oletetaan, että $f : S \to \mathbb{R}$. Soveltamalla kohdan (i) tulosta positiiviseen funktioon $s \mapsto |f(s)|$ havaitaan, että $\mathbb{E}|f(X)| = \sum_{s\in S} |f(s)|\, P_X(s)$. Näin ollen $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$ on yhtäpitävää oletuksen (4.5) kanssa. Oletetaan sitten, että (4.5) pätee. Tällöin summa $\sum_{s\in S} f(s)\, P_X(s)$ suppenee itseisesti ja näin ollen sen arvo ei riipu summausjärjestyksestä. Tästä seuraa, että kohdan (i) todistuksessa tehty päättelyketju voidaan toistaa kohta kohdalta, ja näin ollen yhtälö (4.4) pätee myös tässä tapauksessa. □

4.4 Odotusarvon lineaarisuus ja monotonisuus

Lause 4.6 (Positiivisen odotusarvon lineaarisuus ja monotonisuus)**.** *Olkoot X ja Y positiivisia satunnaislukuja. Tällöin:*

(i) $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$ *kaikilla* $a, b \geq 0$.

(ii) $X \leq Y \implies \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

Todistus. (i) Positiivitermisen summan summausjärjestystä vaihtamalla havaitaan, että

$$\mathbb{E}(aX+bY) = \sum_{\omega\in\Omega}(aX(\omega)+bY(\omega))P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} aX(\omega)P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega} bY(\omega)P(\omega).$$

Väite (i) seuraa tästä tuomalla vakiot a ja b summien eteen.

(ii) Jos $X(\omega) \leq Y(\omega)$ kaikilla $\omega \in \Omega$, niin

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) \leq \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\omega) = \mathbb{E}Y.$$

□

Lause 4.7 (Reaaliarvoisen odotusarvon lineaarisuus ja monotonisuus)**.** *Olkoot X ja Y reaaliarvoisia satunnaislukuja, joilla on odotusarvo. Tällöin:*

(i) Reaaliarvoisella satunnaisluvulla $aX+bY$ on odotusarvo $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $X \leq Y \implies \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

Todistus. (i) Merkitään $Z = aX + bY$. Tällöin $|Z| \leq |a||X| + |b||Y|$ ja soveltamalla Lausetta 4.6 nähdään, että

$$\mathbb{E}|Z| \leq \mathbb{E}(|a||X| + |b||Y|) = |a|\mathbb{E}|X| + |b|\mathbb{E}|Y|$$

Koska $\mathbb{E}|X| < \infty$ ja $\mathbb{E}|Y| < \infty$, tästä nähdään, että Z:lla on odotusarvo

$$\mathbb{E}Z = \sum_{\omega\in\Omega}(aX(\omega) + bY(\omega))P(\omega),$$

ja oikeanpuolimmainen summa suppenee itseisesti. Vaihtamalla itseisesti suppenevan summan summausjärjestystä nähdään, että väite (i) on tosi.

(ii) Oletetaan, että $X(\omega) \leq Y(\omega)$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Tällöin $W \geq 0$ ja Lauseen 4.6 perusteella positiivisen satunnaisluvun $W = Y - X$ odotusarvolle pätee $\mathbb{E}W \geq 0$. Toisaalta kohdan (i) perusteella $\mathbb{E}W = \mathbb{E}Y - \mathbb{E}X$, joten $\mathbb{E}Y - \mathbb{E}X \geq 0$. $\square$

4.5 Riippumattoman tulon odotusarvo

Jos satunnaisluvuilla X ja Y on odotusarvot, niin lineaarisuustuloksen mukaan aina pätee $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$. Vastaavanlainen ominaisuus tulolle ei yleensä pidä paikkaansa, paitsi silloin, kun X ja Y ovat riippumattomia. Seuraava tulos vahvistaa asian.

Lause 4.8. *Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaislukuja.*

(i) Jos X ja Y ovat positiivisia, niin $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$.

(ii) Jos X ja Y ovat reaaliarvoisia, joilla on odotusarvot, niin tällöin myös XY:llä on odotusarvo ja $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$.

Todistus. (i) Merkitään $Z = (Z_1, Z_2)$, missä $Z_1 = X : \Omega \to S_1 \subset \mathbb{R}_+$ ja $Z_2 = Y : \Omega \to S_2 \subset \mathbb{R}_+$. Tällöin Z on satunnaisvektori tila-avaruutenaan $S = S_1 \times S_2$. Lisäksi pätee

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}f(Z) = \sum_{s \in S} f(s) P_Z(s) = \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} f(s_1, s_2) P_Z(s_1, s_2)$$

missä $f(s) = s_1 s_2$ on kuvaus $S \to \mathbb{R}_+$. Koska Z:n komponentit ovat riippumattomat, voidaan sen jakauma P_Z kirjoittaa komponettiensa tulona (VIITE)

$$P_Z(s_1, s_2) = P_{Z_1}(s_1) P_{Z_2}(s_2) = P_X(s_1) P_Y(s_2).$$

Näin ollen positiivitermisen summan summausjärjestystä vaihtamalla nähdään, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} f(s_1, s_2) P_Z(s_1, s_2) \\
&= \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} s_1 s_2 P_X(s_1) P_Y(s_2) \\
&= \left(\sum_{s_1 \in S_1} s_1 P_X(s_1) \right) \left(\sum_{s_2 \in S_2} s_2 P_X(s_2) \right) \\
&= \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y.
\end{aligned}$$

(ii) Oletetaan, että satunnaisluvuilla $X : \Omega \to S_1 \subset \mathbb{R}$ ja $Y : \Omega \to S_2 \subset \mathbb{R}$ on odotusarvot. Tällöin kohdan (i) nojalla

$$\mathbb{E}|XY| = \mathbb{E}|X||Y| = \mathbb{E}|X|\,\mathbb{E}|Y| < \infty,$$

joten myös satunnaisluvulla XY on odotusarvo. Kohdan (ii) väite voidaan nyt todistaa kopioimalla kohdan (i) todistus askel askeleelta. Summausjärjestysten vaihtaminen on sallittua, koska kaikki käsiteltävät summat suppenevat itseisesti. $\square$

5 Stokastinen simulointi

5.1 Diskreetin jakauman simulointi ihanteellisella satunnaisjonolla

Olkoon μ jokin tn-funktio numeroituvasti äärettömällä otosavaruudella S. Seuraavaksi esitetään, miten voidaan rakentaa riippumaton jono $(X_1, X_2, \dots)$ jakaumaa μ noudattavia S-arvoisia satunnaismuuttujia käyttäen riippumatonta jonoa $(U_1, U_2, \dots)$ reaaliakselin yksikkövälillä tasajakautuneita satunnaislukuja. Tälläisen jonon voidaan olettaa olevan saatavilla täydellisesti toimivasta satunnaislukugeneraattorista.

Satunnaisluku U noudattaa yksikkövälin $[0,1]$ tasajakaumaa, jos

$$\mathbb{P}(U \in (a,b)) = \mathbb{P}(U \in (a,b]) = \mathbb{P}(U \in [a,b)) = \mathbb{P}(U \in [a,b]) = b - a$$

kaikilla $0 \le a \le b \le 1$. Varoitus: Tila-avaruus $[0,1]$ on ylinumeroituva, joten yksikkövälin tasajakauma ei voi määritellä tn-funktion avulla, vaan tarvitaan yleisen tn-avaruuden tn-mittoja. Itse asiassa ylläolevasta kaavasta voidaan päätellä, että $\mathbb{P}(U = x) = 0$ *kaikilla* $x \in [0,1]$. Yleisen tn-avaruuden satunnaislukuja käsitellään tarkemmin todennäköisyysteorian syventävillä kursseilla.

Jos S on äärellinen, numeroidaan sen tilat $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ja määritellään $\phi : [0,1] \to S$ kaavalla

$$\phi(u) = \begin{cases} s_1, & \text{jos } u \in [0, t_1], \\ s_2, & \text{jos } u \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \\ s_n, & \text{jos } u \in (t_{n-1}, t_n], \end{cases}$$

missä $t_k = \mu(s_1) + \cdots + \mu(s_k)$.

Lause 5.1. *Jos S on äärellinen, niin satunnaismuuttujat $X_i = \phi(U_i)$, $i = 1, 2, \dots$, ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa μ.*

Todistus. Ensiksi havaitaan, että $\phi(U_i) = s_1$, jos ja vain jos $U_i \le t_1$. Näin ollen

$$P_{X_i}(s_1) = \mathbb{P}(\phi(U_i) = s_1) = \mathbb{P}(U_i \le t_1) = t_1 = \mu(s_1).$$

Tarkastellaan seuraavaksi jotain tilaa s_k, missä $k \ge 2$. Havaitaan, että $\phi(U_i) = s_k$ täsmälleen silloin, kun $U_i \in (t_{k-1}, t_k]$. Näin ollen

$$P_{X_i}(s_k) = \mathbb{P}(\phi(U_i) = s_k) = \mathbb{P}(U_i \in (t_{k-1}, t_k]) = t_k - t_{k-1} = \mu(s_k).$$

Siispä satunnaismuuttujan X_i jakauma on μ.

Jonon $X_1, X_2, \dots$ riippumattomuus seuraa Lauseesta 3.7, jonka mukaan riippumattomien satunnaismuuttujien muunnokset ovat riippumattomia: $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Tämä on totta kahden satunnaismuuttujan tapauksen lisäksi myös äärettömille jonoille. □

Jos S on numeroituvasti ääretön, numeroidaan $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ ja merkitään $t_k = \mu(s_1) + \cdots + \mu(s_k)$, kuten edelläkin. Tässäkin tapauksessa $\phi : [0, 1] \to S$ määritellään kaavalla

$$\phi(u) = \begin{cases} s_1, & \text{jos } u \in [0, t_1], \\ s_2, & \text{jos } u \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \\ s_k, & \text{jos } u \in (t_{k-1}, t_k], \\ \vdots & \end{cases}$$

Koska $t_k = \sum_{j=1}^{k} \mu(s_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(s_j) = 1$, pätee $(t_{k-1}, t_k] \subset [0, 1]$ kaikilla $k \geq 2$, kuten pitääkin. Yllämääritelty ϕ on siis hyvin määritelty kuvaus joukosta $[0, 1]$ joukkoon S.

Lause 5.2. *Jos S on numeroituvasti ääretön, niin satunnaismuuttujat $X_i = \phi(U_i)$, $i = 1, 2, \dots$, ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa μ.*

Todistus. Lauseen 5.1 todistus toimii myös tässä tapauksessa sanasta sanaan. □

5.2 Pseudosatunnaislukugeneraattorit

Pseudosatunnaislukugeneraattorit ovat algoritmeja, joiden tavoitteena on tuottaa jonoja $(u_1, u_2, \dots)$, jotka muistuttavat mahdollisimman paljon riippumatonta satunnaisjonoa $(U_1, U_2, \dots)$, jonka alkiot U_i ovat tasajakautuneita yksikkövälillä $[0, 1]$.

Tyypillinen pseudosatunnaislukugeneraattori voidaan kuvata kolmikkona (S, f, g), missä äärellinen joukko S on generaattorin sisäinen tila-avaruus, kuvaus $f : S \to S$ on sekoitusfunktio ja kuvaus $g : S \to [0, 1]$ on palautusfunktio. Algoritmi ottaa syötteekseen siemenluvun $z_0 \in S$ ja sen jälkeen rekursiivisesti laskee tilat $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, …ja palauttaa luvut $u_1 = g(z_1)$, $u_2 = g(z_2)$, …

Esimerkki 5.3 (Middle square)**.** Middle square -algoritmin sisäinen tila-avaruus on $S = \{0, 1, \dots, 9999\}$ ja sekoitusfunktio $f : S \to S$ määritellään niin, että sen syöte ensin neliöidään, saatu tulos tulkitaan kahdeksannumeroisena lukuna (eteen lisätään tarvittaessa nollia) ja sitten poimitaan saadun kahdeksannumeroisen luvun neljä keskimmäistä numeroa. Lyhyesti voidaan kirjoittaa

$$f(z) = \lfloor z^2/100 \rfloor \mod 10000,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ on luvun x alaspäin pyöristys ja $x \mod 10000$ palauttaa osamäärän $x/10000$ jakojäännöksen. Palautefunktio määritellään kaavalla

$$g(z) = \frac{z}{10000}.$$

Tätä algoritmia on helppo laskea kynällä ja paperilla. Lisäksi sen tulokset näyttävät lyhyissä iteraatioissa melko satunnaisilta. Algoritmissa on kuitenkin lukuisia heikkouksia. Esimerkiksi siemenluvulla $z_0 = 0$ käynnistettynä algoritmi palauttaa pelkkiä nollia.

Kaikissa pseudosatunnaislukugeneraattoreissa on perustavanlaatuisena heikkoutena se, että ne ovat jaksollisia. Nimittäin lähtien mistä tahansa äärellisen joukon tilasta $z_0 \in S$, jono $z_1, z_2, \ldots$ lopulta väistämättä osuu johonkin jo käytyyn tilaan z_m, eli on olemassa luvut $m \geq 1$ ja $k \geq 1$, joille $z_{m+k} = z_m$. Tästä seuraa, että $z_\ell = z_{\ell-k}$ ja näin ollen myös $u_\ell = u_{\ell-k}$ kaikilla $\ell \geq m + k$, joten luvusta $m + k$ eteenpäin generaattorin tuottamat luvut tiedetään ennalta. Pienintä lukua k, jolle näin käy, kutsutaan generaattorin jaksonpituudeksi. Nykypäivän numeerisen laskennan ohjelmistoissa yleisesti käytetty 32-bittinen *Mersenne twister* -algoritmi on suunniteltu niin, että sen jaksonpituus on huikea $2^{19937} - 1 \approx 4.3 \times 10^{6001}$. Tämä ylitähtitieteellisen suuri jaksonpituus takaa, ettei toistuvia jonoja ikinä nähdä käytännön laskelmissa.

5.3 Fysikaaliset satunnaislukugeneraattorit

Fysikaaliset satunnaislukugeneraattorit perustuvat jonkin kaoottisen tai muulla tavoin vaikeasti ennakoitavan fysikaalisen ilmiön mittaamiseen. Tyyppiesimerkki kaoottisesta systeemistä on lottokone, missä kimpoilevien lottopallojen kaoottinen dynamiikka tekee arvonnan tuloksen ennustamisesta käytännössä mahdotonta. Muita tämäntyyppisiä satunnaislukugeneraattoreita ovat esimerkiksi kolikko, noppa ja rulettipyörä. Nykypäivän kryptografisiin tarpeisiin edellämainitut menetelmät ovat kuitenkin liian hitaita ja kalliita. Nopeita satunnaislukugeneraattoreita saadaan mittaamalla satunnaisilta vaikuttavia luonnonilmiöitä, kuten elektronien lämpökohinaa tai ilmakehän sähkömagneettista kohinaa[1].

6 Satunnaisluvun keskittyminen

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja $\mathbb{P}$ tn-funktiota P vastaava tn-mitta. Tarkastellaan satunnaislukua X, jolla on odotusarvo $\mathbb{E}X$. Mitä kyseinen

[1] Esim. http://www.random.org/.

odotusarvo kertoo yksittäisen otoksen pohjalta arvotusta X:n arvosta? Intuitiomme kertoo, että X:n arvon tulisi *melko* todennäköisesti olla *kohtuullisen* lähellä odotusarvoa $\mathbb{E}$, eli jossain mielessä

$$X \approx \mathbb{E}X.$$

Vastaavasti empiiriset kokeilut antavat aihetta uskoa, että jos satunnaisluvut $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomia ja jakautuneita kuten X, niin

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} \approx \mathbb{E}X$$

ja lisäksi arvion pitäisi olla sitä tarkempi, mitä suurempi n on.

Täsmällisen merkityksen antaminen ylläoleville yhtälöille ei ole aivan itsestään selvää, koska vasen puoli on satunnainen luku siinä missä oikea puoli on deterministinen.

6.1 Satunnaisvaihtelun kvantifiointi

Jotta arviolle $X \approx \mathbb{E}X$ saadaan täsmällinen merkitys, tarvitaan keinoja kvantifioida X:n satunnaisvaihtelua, eli kuinka paljon X:n arvot tyypillisesti poikkeavat odotusarvostaan. Luonnollinen ajatus on laskea matemaattinen odotusarvo poikkeamalle $|X - \mathbb{E}X|$, joka itsessään on positiivinen satunnaisluku. Painotettu versio kyseisestä suureesta saadaan laskemalla odotusarvo neliöpoikkeamalle $|X - \mathbb{E}X|^2$. Satunnaisluvun X, jolla on odotusarvo $\mathbb{E}X$, *varianssi* määritellään kaavalla

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \in [0, \infty].$$

Vaikka neliöpoikkeaman käyttö tuntuu intuitiivisesti vähemmän luontevalta kuin absoluuttisen poikkeaman, on varianssi silti yleisimmin käytetty satunnaisvaihtelun mittari. Tämä johtuu siitä, että varianssi käyttäytyy kauniisti riippumattomien summien suhteen, kuten kohta nähdään.

Seuraava tulos vahvistaa, että varianssi voidaan aina laskea jakaumasta.

Lause 6.1. *Olkoon X jokin satunnaisluku, jolla on odotusarvo $m = \mathbb{E}X$ ja jakauma P_X numeroituvalla tila-avaruudella $S \subset \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{s \in S} (s - m)^2 P_X(s).$$

Todistus. Määritellään funktio $f : S \to \mathbb{R}_+$ kaavalla $f(s) = (s-m)^2$. Tällöin Lauseen 4.5:(i) mukaan

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}f(X) = \sum_{s \in S} f(s) P_X(s) = \sum_{s \in S} (s - m)^2 P_X(s).$$

□

Lause 6.2. *Olkoon X ja Y satunnaislukuja, joilla on odotusarvot.*

(i) $\operatorname{Var}(1) = 0$.

(ii) $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var}(X)$ *kaikilla* $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$, *jos* $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Todistus. Todistetaan kohta (iii) ja jätetään muut harjoitustehtäviksi. Merkitään $m_X = \mathbb{E}X$ ja $m_Y = \mathbb{E}Y$. Havaitsemalla ensin, että

$$\begin{aligned}(X + Y - \mathbb{E}(X + Y))^2 &= ((X - m_X) + (Y - m_Y))^2 \\ &= (X - m_X)^2 + 2(X - m_X)(Y - m_Y) + (Y - m_Y)^2,\end{aligned}$$

voidaan odotusarvon lineaarisuuden nojalla kirjoittaa

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \mathbb{E}(X - m_X)^2 + 2\mathbb{E}(X - m_X)(Y - m_Y) + \mathbb{E}(Y - m_Y)^2.$$

Ylläolevassa yhtälössä keskimmäinen termi oikealla on nolla, koska Lauseen 3.7 mukaan $X \perp\!\!\!\perp Y \implies X - m_X \perp\!\!\!\perp Y - m_Y$ ja Lauseen 4.8 mukaan

$$\mathbb{E}(X - m_X)(Y - m_Y) = \mathbb{E}(X - m_X)\,\mathbb{E}(Y - m_Y) = 0.$$

Näin ollen

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \mathbb{E}(X - m_X)^2 + \mathbb{E}(Y - m_Y)^2 = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y).$$

□

Lause 6.3. *Olkoon $X_1, \dots, X_n$ riippumattomia satunnaislukuja, joilla on odotusarvot. Tällöin*

$$\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) \;=\; \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n).$$

Todistus. Tapaus $n = 2$ seuraa Lauseesta 6.2. Yleisempi tapaus jätetään harjoitustehtäväksi. □

6.2 Keskittymisepäyhtälöitä

Lause 6.4 (Markovin epäyhtälö)**.** *Olkoon X positiivinen satunnaisluku. Tällöin*

$$\mathbb{P}(X > a) \le \frac{\mathbb{E}X}{a} \quad \textit{kaikilla } a > 0.$$

Todistus. Valitaan $a > 0$ ja merkitään $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\}$. Tällöin

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) \ge \sum_{\omega \in A} X(\omega)P(\omega).$$

Koska $X(\omega) > a$ kaikilla $\omega \in A$, seuraa tästä, että

$$\mathbb{E}X \geq a \sum_{\omega \in A} P(\omega) = a\mathbb{P}(X > a).$$

Väite seuraa jakamalla ylläolevan epäyhtälön molemmat puolet luvulla a. $\square$

Lause 6.5 (Chebyshevin epäyhtälö)**.** *Olkoon X reaaliarvoinen satunnaisluku, jolla on odotusarvo $\mathbb{E}X$. Tällöin*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2} \quad \textit{kaikilla } \epsilon > 0.$$

Todistus. Merkitään $Y = (X - \mathbb{E}X)^2$. Tällöin Markovin epäyhtälön avulla nähdään, että

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \epsilon) = \mathbb{P}(Y > \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}Y^2}{\epsilon^2}.$$

Väite seuraa tästä, koska $\mathbb{E}Y = \mathrm{Var}(X)$. $\square$

7 Suurten lukujen laki

7.1 Stokastinen suppeneminen

Sanotaan, että satunnaisjono $(Z_1, Z_2, \dots)$ *suppenee stokastisesti* satunnaislukuun Z, jos kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$\mathbb{P}\left(|Z_n - Z| > \epsilon\right) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tällöin merkitään

$$Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z.$$

Jono $(Z_1, Z_2, \dots)$ suppenee *otoksittain* satunnaislukuun Z, jos $Z_n(\omega) \to Z(\omega)$ kaikilla otoksilla $\omega \in \Omega$.

Lause 7.1. *Jos $Z_n \to Z$ otoksittain, niin silloin $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$.*

Todistus. Sivuutetaan. $\square$

7.2 Heikko suurten lukujen laki

Seuraava tulos kertoo, miten

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \approx \mathbb{E}X$$

suurilla n arvoilla voidaan määritellä tarkasti. Kyseistä tulosta kutsutaan heikoksi suurten lukujen laiksi.

Lause 7.2. *Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia satunnaislukuja, jotka noudattavat samaa jakaumaa kuin satunnaisluku X, jolla on odotusarvo $\mathbb{E}X$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X) < \infty$. Tällöin*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - \mathbb{E}X\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2 n}$$

kaikilla $\epsilon > 0$ ja $n \geq 1$, ja lisäksi

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X, \quad \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Merkitään $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots X_n)$. Tällöin $\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}X$ ja varianssin summakaavasta (Lause 6.3) seuraa, että

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n}.$$

Näin ollen Chebyshevin epäyhtälön (Lause 6.5) nojalla

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - \mathbb{E}X\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}(|Z_n - \mathbb{E}Z_n| > \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2 n}.$$

Ensimmäinen väite seuraa tästä. Jälkimmäinen väite seuraa ensimmäisestä, koska yläraja $\frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2 n} \to 0$, kun $n \to \infty$. □

Suurten lukujen laista on olemassa useita vahvempia versioita. Tämän kurssin tarkoituksiin yllä esitetty versio on kuitenkin riittävän vahva.

7.3 Monte Carlo -simulointi

Seuraavaksi esitetään tapa saada simuloimalla selville satunnaismuuttujan X jakauma, kun käytössä on tapa generoida riippumaton jono $X_1, X_2, \ldots$ satunnaismuuttujia, jotka ovat jakautuneet kuten X.

Tapahtuman $A \subset \Omega$ *indikaattori* on satunnaismuuttuja 1_A, jolle pätee

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in A, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Joskus käytetään mukavuussyistä merkintää $1_A(\omega) = 1(\omega \in A)$.

Tehtävä 7.3. Tapahtuman $A \subset \Omega$ indikaattori 1_A on Bernoulli-jakautunut joukossa $\{0, 1\}$ parametrilla $p = \mathbb{P}(A)$, eli

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_A = 0) &= 1 - p, \\ \mathbb{P}(1_A = 1) &= p. \end{aligned}$$

Seuraava tulos kertoo, miten satunnaismuuttujan X jakauma P_X voidaan arvioida mielivaltaisen tarkasti, jos on saatavilla riippumaton jono satunnaismuuttujan X tavoin jakautuneita satunnaismuuttujia $X_1, X_2, \ldots$ Tätä menetelmää kutsutaan *Monte Carlo* -simuloinniksi. Satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_n)$ *empiirinen jakauma* on tn-funktio $\mu_n : S \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla

$$\mu_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i = s\}}, \quad s \in S.$$

Empiirinen jakauma pisteessä s kertoo siis suhteellisen osuuden satunnaismuuttujista $X_1, \ldots, X_n$, jotka saavat arvon s. Koska μ_n riippuu arvonnan $(X_1, \ldots, X_n)$ tuloksesta, on se itsessään *satunnainen* funktio. Suurilla n:n arvoilla empiirinen jakauma on kuitenkin likimain deterministinen, kuten seuraava tulos kertoo.

Lause 7.4. *Olkoon $X : \Omega \to S$ satunnaismuuttuja numeroituvassa tila-avaruudessa S jakaumanaan P_X. Tällöin kaikilla $s \in S$ pätee*

$$\mu_n(s) \xrightarrow{\mathbb{P}} P_X(s),$$

kun $n \to \infty$.

Todistus. Valitaan jokin $s \in S$. Olkoon $Z = 1_{\{X=s\}}$ tapahtuman $\{X = s\}$ indikaattori ja $Z_i = 1_{\{X_i=s\}}$ tapahtuman $\{X_i = s\}$ indikaattori. Tällöin satunnaismuuttujat $Z_1, Z_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja kukin jakautunut kuten Z. Lisäksi

$$\mathbb{E}Z = P_X(s)$$

ja

$$\mathrm{Var}(Z) = P_X(s)(1 - P_X(s)) < \infty.$$

(Näiden tarkastaminen jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.) Suurten lukujen lain (Lause 7.2) perusteella

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i=s\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}Z = P_X(s).$$

□

8 Uhkapelit

8.1 Kasinon tuotto ja riski

8.1.1 Identtiset pelaajat

Tarkastellaan kasinoa, missä K identtistä pelaajaa pelaa samaa peliä samalla tavoin panostaen. Päivän aikana pelataan n kierrosta. Kullakin kierroksella kukin pelaajaa voittaa +1 EUR tn:llä p ja häviää 1 EUR tn:llä $q = 1 - p$. Olkoon θ_i indikaattori tapahtumalle, että kierroksella i pelaajat voittavat. Tällöin kunkin pelaajan k tuotto kierrokselta i on

$$X_{i,k} = 2(\theta_i - 1).$$

Kasinon tuotto kierrokselta i on

$$Y_i = -\sum_{k=1}^{K} X_{i,k},$$

ja kasinon päivätuotto on näin ollen

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} (1 - 2\theta_i).$$

Koska $\mathbb{E}\theta_i = p$, tästä nähdään, että kasinon odotettu päivätuotto on

$$\mathbb{E}S_n = Kn(1 - 2p).$$

Vastaavasti, koska $\mathrm{Var}(\theta_i) = p(1 - p)$, on kasinon päivätuoton varianssi

$$\sigma_{S_n}^2 = \mathrm{Var}(S_n) = 4K^2 np(1 - p)$$

ja keskihajonta

$$\sigma_{S_n} = 2\sqrt{p(1-p)}K\sqrt{n}.$$

Esimerkki 8.1. Kasinolla $K = 5$ pelaajaa pelaa päivän aikana $n = 480$ kierrosta rulettia. Jokainen pelaaja pelaa samassa rulettipöydässä ja panostaa euron pienille luvuille $(1 - -18)$. Oletetaan, että jokaisella pelaajalla on tilillään tarpeeksi pääomaa niin, ettei kukaan joudu lopettamaan kesken päivän varojen loppumisen vuoksi. Merkitään rulettipelin tuloksia symbolein $(U_1, \dots, U_n)$. Nämä ovat riippumattomia ja tasajakautuneita joukossa $\{0, 1, \dots, 36\}$. Tällöin $\theta_i = 1_{\{X_i \in [1,18]\}}$ on Bernoulli-jakautunut parametrilla $p = 18/37$. Sijoittamalla nämä lukuarvot ylläoleviin kaavoihin havaitaan, että kasinon päivätuoton odotusarvo on noin 64.86 EUR ja keskihajonta noin 109.50 EUR.

8.1.2 Riippumattomat pelaajat

Tarkastellaan seuraavaksi edellä esitellyn kasinon muunnelmaa, missä pelaajat toimivat toisistaan riippumattomasti ja panostavat euronsa toisistaan riippumattomiin tapahtumiin. Tällöin pelaajan k tuotto kierrokselta i on

$$X_{i,k} = 2\theta_{i,k} - 1,$$

missä satunnaismuuttujat $\theta_{i,k}$ ovat riippumattomia Bernoulli-jakautuneita parametrilla p. Tällöin kasinon päivätuotto on

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} (1 - 2\theta_{i,k}).$$

Kuten edellä, tämänkin kasinon odotettu päivätuotto on

$$\mathbb{E} S_n = Kn(1 - 2p).$$

Kasinon päivätuoton varianssi sitävastoin on tässä tapauksessa

$$\sigma_{S_n}^2 = \mathrm{Var}(S_n) = 4Knp(1 - p)$$

ja keskihajonta

$$\sigma_{S_n} = 2\sqrt{p(1-p)}\sqrt{Kn}.$$

Tuoton odotusarvo on siis sama, mutta keskihajonta on pienentynyt kertoimella $\sqrt{K}$.

Esimerkki 8.2. Kasinolla $K = 5$ pelaajaa pelaa päivän aikana $n = 480$ kierrosta rulettia. Jokainen pelaaja pelaa yksin omassa rulettipöydässään ja panostaa kullakin kierroksella euron pienille luvuille. Oletetaan, että jokaisella pelaajalla on tilillään tarpeeksi pääomaa niin, ettei kukaan joudu lopettamaan kesken päivän varojen loppumisen vuoksi. Merkitään rulettipöydän k tuloksia symbolein $(U_{1,k}, \ldots, U_{n,k})$. Nämä ovat riippumattomia ja tasajakautuneita joukossa $\{0, 1, \ldots, 36\}$. Tällöin $\theta_{i,k} = 1_{\{U_{i,k} \in [1,18]\}}$ on Bernoulli-jakautunut parametrilla $p = 18/37$. Sijoittamalla nämä lukuarvot ylläoleviin kaavoihin havaitaan, että kasinon päivätuoton odotusarvo on noin 64.86 EUR ja keskihajonta noin 48.97 EUR. Esimerkkiin 8.1 verrattuna kasino saa tässä tapauksessa saman keskituoton pienemmällä riskillä.

Vertailemalla Esimerkkejä 8.1 ja 8.2 nähdään, että kasino voi pienentää liiketoimintansa riskiä hajauttamalla pelaajat useaan toisistaan riippumattomaan rulettipöytään. Näissä esimerkeissä erot keskihajonnassa ovat euromääräisesti pieniä, mutta samantyyppistä ajattelua voidaan soveltaa pankkitoiminnan riskeihin. Tällöin yllämainittujen esimerkkien lukuihin voidaan lisätä seitsemän nollaa perään ja pankki, jonka riskitaso keskihajonnalla mitattuna, on kaksinkertainen muihin pankkeihin verrattuna on suuressa vaarassa ajautua konkurssiin. Hajautusilmiö tunnetaan hyvin sijoitustoiminnassa, missä osakesalkun riskiä pyritään pienentämään valitsemalla salkkuun useiden eri yhtiöiden osakkeita. Tähän ilmiöön perustuu myös vakuutustoiminta, missä esim. yksittäisen omakotitalon tulipaloon tai vesivahinkoon liittyvä aineellinen riski pienennetään hajauttamalla se vakuutussopimuksen kautta usean kiinteistönomistajan keskuuteen.

8.2 Pelurin vararikko

Monella uhkapelurilla on mielessään jokin tavoitetaso n, miten korkealle hän haluaa kartuttaa pääomansa. Tällainen peluri yleensä pelaa uhkapeliä niin kauan, kunnes hänen pääomansa saavuttaa tason n tai hän menettää kaikki rahansa. Oletetaan, että pelurilla on alussa i euroa, ja että kukin pelikierros muista riippumatta tuottaa euron voittoa tn:llä p ja euron tappiota tn:llä $q = 1 - p$. Olkoon θ_t indikaattori tapahtumalle, että peluri voittaa kierroksella t. Tällöin pelurin tuotto kierrokselta t on

$$X_t = 2\theta_t - 1$$

ja pelurin pääoma t pelikierroksen jälkeen on

$$V_t = i + \sum_{s=1}^{t} X_s.$$

Pelin kesto puolestaan on satunnaismuuttuja

$$T = \min\{t \geq 1 : V_t \in \{0, n\}\}.$$

Periaatteessa voi käydä niin, että V_t ei koskaan osu tasolle 0 tai n, jolloin ylläoleva minimoitava aikaindeksien joukko on tyhjä. Tämän tilanteen varalle sovitaan, että tyhjän joukon minimi on äärertön. Satunnaismuuttuja T saa siis arvoja numeroituvassa tila-avaruudessa $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Seuraava tulos kuitenkin osoittaa, että tällainen uhkapeli aina lopulta päättyy.

Lause 8.3. *Yllä kuvattu peli päättyy todennäköisyydellä yksi.*

Todistus. Oletetaan, että yhden kierroksen voitto-tn $p < 1$. (Tapauksessa $p = 1$ peli selvästi päättyy viimeistään n kierroksen kuluttua.) Merkitään symbolilla

$$A_k = \bigcap_{t=kn+1}^{kn+n} \{\theta_t = 0\}$$

tapahtumaa, että peli tuottaa n kertaa peräkkäin tappiota kierroksilla $kn + 1, k + 2, \ldots, kn + n$. Tapahtuman A_k sattuessa peluri väistämättä menettää rahansa, mikäli hän on vielä kierroksen kn jälkeen pelissä mukana. Näin ollen $\{T = \infty\} \subset A_k^c$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots$, joten erityisesti

$$\{T = \infty\} \subset \bigcap_{k=0}^{K} A_k^c$$

kaikilla $K \geq 0$. Koska pelikierroksia kuvaavat satunnaismuuttujat $\theta_1, \theta_2, \ldots$ ovat riippumattomia, pätee

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{K} A_k^c\right) = \prod_{k=0}^{K} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=0}^{K} (1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

Pelikierrosten riippumattomuuden nojalla pätee myös

$$\mathbb{P}(A_k) = \prod_{t=kn+1}^{kn+n} \mathbb{P}(\theta_t = 0) = q^n,$$

joten näin ollen

$$\mathbb{P}(T = \infty) \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{K} A_k^c \right) = (1 - q^n)^{K+1}.$$

Koska ylläoleva epäyhtälö pätee kaikilla $K \ge 0$ ja koska $1 - q^n \in (0, 1)$, voidaan ylläolevan epäyhtälön oikealla puolella viedä $K \to \infty$ ja tästä päätellä, että $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$. Näin ollen $T < \infty$ tn:llä yksi. $\square$

8.2.1 Tavoitteeseen pääsyn ja vararikon todennäköisyydet

Olkoon r_i tn tapahtumalle, että alkupääomalla $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ aloittava peluri saavuttaa tavoitetasonsa n. Tällöin $1 - r_i$ on kyseisen pelaaan tn mennä vararikkoon. Jos $i = 0$, niin peluri on heti vararikossa ja selvästikin $r_0 = 0$. Jos taas $i = n$, niin peluri on heti tavoitetasollansa ja tällöin $r_n = 1$. Yleisessä tapauksessa $1 \le i \le n - 1$ luvun r_i laskemisessa voidaan edetä seuraavasti.

Tarkastellaan $n+1$ peluria, joista kukin pelaa saman pelin riippumatonta kopiota. Oletetaan, että kaikilla pelureilla on sama tavoitetaso n ja pelurilla i on alkupääoma i, missä $i = 0, 1, \ldots, n$. Merkitään symbolilla $\theta_{i,t}$ indikaattoria tapahtumalle, että pelurin i pelaamassa pelissä tulee voitto kierroksella t. Tällöin pelien riippumattomuusoletuksen mukaan satunnaismuuttujat $\theta_{i,t}$ ovat riippumattomia. Olkoon V_i tapahtuma, että peluri i saavuttaa tavoitetasonsa. Tarkastellaan, mitä ensimmäisellä kierroksella tapahtuu pelurille i, missä $1 \le i \le n-1$. Avainhavainto on huomata, että pelurin i tn saavuttaa tavoitetasonsa *ehdolla* $\{\theta_{i,1} = 1\}$ on sama kuin pelurin $i + 1$ tn ylipäänsä saavuttaa tavoitetasonsa, eli

$$\mathbb{P}(V_i \,|\, \theta_{i,1} = 1) = \mathbb{P}(V_{i+1}).$$

Vastaavanlaisella päättelyllä nähdään, että

$$\mathbb{P}(V_i \,|\, \theta_{i,1} = 0) = \mathbb{P}(V_{i-1}).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_i) &= q\mathbb{P}(V_i \,|\, \theta_{i,1} = 0) + p\mathbb{P}(V_i \,|\, \theta_{i,1} = 1)\\ &= q\mathbb{P}(V_{i-1}) + p\mathbb{P}(V_{i+1}).\end{aligned}$$

Koska $r_i = \mathbb{P}(V_i)$, pätee siis

$$r_i = qr_{i-1} + pr_{i+1}$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$. Ratkaisemalla ylläoleva yhtälöryhmä käyttäen reunaehtoja $r_0 = 0$ ja $r_n = 1$ (harjoitustehtävä) nähdään, että

$$r_i = \frac{\sum_{h=0}^{i-1} (q/p)^h}{\sum_{h=0}^{n-1} (q/p)^h}. \tag{8.1}$$

Tapauksessa $p = q$ (reilu peli) tämä sievenee muotoon

$$r_i = \frac{i}{n}$$

ja tapauksessa $p \neq q$ muotoon

$$r_i = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^n}.$$

8.2.2 Ahne peluri

Ahne peluri asettaa tavoitetasonsa n hyvin korkealle. Ahneen pelurin voitolle pääsyn todennäköisyydestä saadaan mielikuva tutkimalla, miten kaavassa (8.1) laskettu r_i käyttäytyy suurilla n arvoilla. Reilun pelin ($p = q$) tapauksessa

$$r_i = \frac{i}{n} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Yleisessä $p \neq q$ tapauksessa taas

$$r_i = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^n} \to \begin{cases} 0, & \text{kun } p < q, \\ 1 - (q/p)^i, & \text{kun } p > q. \end{cases}$$

Nähdään siis, että epäsuotuisassa ja reilussa pelissä ahneen pelurin tn saavuttaa korkea tavoitetaso on likimain nolla. Suotuisassa pelissä kyseinen todennäköisyys sitävastoin on likimain $1 - (q/p)^i$. Kehittyneempiä tekniikoita käyttäen on mahdollista todistaa, että pelurin, jonka tavoitetaso on ääretön, todennäköisyys ansaita äärettömän suuri varallisuus on epäsuotuisalle ja reilulle pelille nolla, ja suotuisalle pelille $1 - (q/p)^i$.

9 Todennäköisyydet generoiva funktio

Olkoon $X : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määritelty positiivinen satunnainen kokonaisluku jakaumanaan P_X. Satunnaisluvun X *todennäköisyydet generoiva funktio (tng-funktio, tngf)* määritellään kaavalla

$$G_X(t) = \mathbb{E} t^X = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_X(k)$$

niille $t \in \mathbb{R}$, joille oikealla oleva potenssisarja suppenee.

Esimerkki 9.1. Joukon $\{1, 2, \dots\}$ *geometrinen jakauma* onnistumis-tn:llä $p \in (0, 1)$ on tn-funktio

$$\mu(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Olkoon X:llä jakauma μ. Tällöin X voidaan tulkita $\mathbb{Z}_+$-arvoisena satunnaislukuna jakaumanaan $P_X : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, missä

$$P_X(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ (1-p)^{k-1} p, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

X:n todennäköisyydet generoiva funktio saadaan laskemalla

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k (1-p)^{k-1} p = pt \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)t)^k.$$

Oikeanpuolinen sarja suppenee, kun $(1-p)|t| < 1$ ja hajaantuu muulloin. Näin ollen

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}, \quad |t| < \frac{1}{1-p}.$$

9.1 Tng-funktio määrää jakauman

Todennäköisyydet generoivia funktioita käsitellään derivoimalla potenssisarjoja. Seuraava tulos sisältää pähkinänkuoressa tärkeimmät tiedot potenssisarjojen teoriasta.

Lause 9.2. *Olkoon $G(t) = \sum_0^\infty a_k t^k$ positiivista lukujonoa $(a_0, a_1, \dots)$ vastaava potenssisarja.*

(i) *On olemassa sellainen $R \geq 0$, että sarja $G(t)$ suppenee aina kun $|t| < R$ ja hajaantuu aina kun $|t| > R$. Kyseinen luku R on nimeltään potenssisarjan* suppenemissäde.

(ii) *Funktiolla G on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat välillä $(-R, R)$ ja potenssisarjan $G(t)$ voi derivoida termeittäin mielivaltaisen monta kertaa aina kun $|t| < R$.*

(iii) *Jos $R \geq 1$, niin $G(t) \to \sum_{k=0}^\infty a_k$, kun $t \to 1$ alhaalta.*

(iv) *$G(t)$:n derivaattaa vastaavalla potenssisarjalla $\sum_1^\infty k a_k t^{k-1}$ on sama suppenemissäde kuin $G(t)$:n potenssisarjalla.*

Todistus. Tämä asia oletetaan tunnetuksi aiemmilta kursseilta. Katso esim. [5, Lemma 5.10, Lause 5.11]. □

Lause 9.3. *Positiivisen satunnaisen kokonaisluvun X tng-funktio G_X on aina määritelty joukossa $[-1,1]$. G_X määrää X:n jakauman yksikäsitteisesti kaavalla*

$$P_X(k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

missä $G_X^{(k)}$ on funktion G_X k:s derivaatta.

Todistus. Kun $|t| \le 1$, niin

$$|G_X(t)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |t|^k P_X(k) \le \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1.$$

Näin ollen G_X on aina määritelty välillä $t \in [-1,1]$ ja potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} t^k P_X(k)$ suppenemissäde $R \ge 1$. Lauseen 9.2 mukaan G_X:llä on kaikkien kertalukujen derivaatat välillä $(-1,1)$, jotka voidaan laskea derivoimalla sarja termi termiltä. Näin tekemällä havaitaan, että

$$G_X'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} t^k \, P_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} \, P_X(k)$$

ja

$$G_X''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d}{dt} k t^{k-1} \, P_X(k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) t^{k-2} \, P_X(k),$$

mistä induktion voimin päätellään, että G_X:n j:s derivaatta toteuttaa

$$G_X^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1) t^{k-j} \, P_X(k) = j! \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} t^{k-j} \, P_X(k)$$

kaikilla $j \ge 0$. Sijoittamalla ylläolevaan kaavaan $t = 0$ ja muistamalla potenssisarjojen määritelmän mukainen käytäntö $t^0 = 1$ kaikilla t, havaitaan että

$$G_X^{(j)}(0) = j! \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} 0^{k-j} \, P_X(k) = j! P_X(j).$$

Väite seuraa jakamalla ylläolevan yhtälön molemmat puolet j:n kertomalla.

□

9.2 Odotusarvon ja varianssin laskeminen

Lause 9.4. *Olkoon X positiivinen kokonaislukuarvoinen satunnaisluku ja oletetaan, että X:n tng-funktio G_X on määritelty pisteessä $t_0 > 1$. Tällöin X:llä on äärellinen odotusarvo ja varianssi, jotka saadaan laskettua kaavoista*

$$\mathbb{E}X = G_X'(1) \tag{9.1}$$

ja

$$\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2. \tag{9.2}$$

Todistus. Koska G_X on määritelty pisteessä t_0, on G_X:ää vastaavan potenssisarjan suppenemissäde $R > 1$. Lauseen 9.2 mukaan G_X:ää voidaan näin ollen rajatta derivoida luvun 1 ympäristössä. Kaksi ensimmäistä derivaattaa yleiselle t ovat

$$G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} t^k \, P_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} \, P_X(k) \tag{9.3}$$

ja

$$G''_X(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d}{dt} k t^{k-1} \, P_X(k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) t^{k-2} \, P_X(k). \tag{9.4}$$

Sijoittamalla $t = 1$ havaitaan, että

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \, P_X(k) = \mathbb{E}X,$$

joten (9.1) pätee. Lisäksi

$$G''_X(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \, P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \, P_X(k) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

Esittämällä X:n varianssi muodossa

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2,$$

nähdään, että (9.2) pätee. $\square$

Esimerkki 9.5. Olkoon X satunnainen kokonaisluku, joka noudattaa geometrista jakaumaa joukossa $\{1, 2, \dots\}$ onnistumis-tn:llä $p \in (0, 1)$. Miten lasketaan X:n odotusarvo ja varianssi? Nämä voidaan laskea suoraan kaavoista

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k P_X(k) \quad \text{ja} \quad \mathrm{Var}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mathbb{E}X)^2 P_X(k),$$

mutta helpompi tapa on hyödyntää Esimerkissä 9.1 laskettua tng-funktiota

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \quad |t| < \frac{1}{q},$$

missä $q = 1 - p$. Derivoimalla nähdään, että

$$G'_X(t) = \frac{p(1-qt) - (-q)(pt)}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$

ja

$$G''_X(t) = \frac{0 \cdot (1-qt)^2 - p \cdot 2(1-qt)(-q)}{(1-qt)^4} = \frac{2pq(1-qt)}{(1-qt)^4} = \frac{2pq}{(1-qt)^3}.$$

Sijoittamalla $t = 1$ saadaan

$$G'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

ja

$$G''_X(1) = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

Näin ollen

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$$

ja

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Esitetään vielä tarkempi tulos odotusarvon laskemisesta tapauksessa, missä ei välttämättä etukäteen tiedetä, onko G_X:n potenssisarjaa vastaava suppenemissäde aidosti suurempi kuin yksi.

Lause 9.6. *Olkoon G_X jonkin $\mathbb{Z}_+$-arvoisen satunnaisluvun X tngf. Tällöin*

$$\mathbb{E}X = \lim_{t \uparrow 1} G'_X(t) \in [0, \infty],$$

missä ylläoleva raja-arvo otetaan t:n lähestyessä alhaaltapäin lukua 1.

Todistus. Koska aina pätee $G_X(1) = 1$, on G_X:n suppenemissäde on $R \geq 1$ ja näin ollen Lauseen 9.2:(ii) mukaan G_X on rajatta termeittäin derivoituva välillä $(-1, 1)$. Pisteessä $t \in (0, 1)$ derivaatta voidaan kaavan (9.3) avulla kirjoittaa muodossa

$$G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_X(k).$$

Lauseen 9.2:(iv) mukaan ylläolevan G'_X:n potenssisarjan suppenemissäde on sama kuin G_X:n. Näin ollen Lauseen 9.2:(iii) perusteella

$$\lim_{t \uparrow 1} G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_X(k) = \mathbb{E}X.$$

$\square$

9.3 Satunnaissumma

Tarkastellaan summaa

$$M = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

missä sekä summattavat $X_1, X_2, \ldots$ että summausindeksi N ovat $\mathbb{Z}_+$-arvoisia satunnaislukuja. Yllä tulkitaan $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$.

Lause 9.7. *Oletetaan, että $N, X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia ja että satunnaisluvut $X_1, X_2, \dots$ ovat samoin jakautuneita. Tällöin satunnaissumman $M = \sum_{i=1}^N X_i$ tngf:lle pätee*

$$G_M(t) = G_N(G_{X_1}(t))$$

kaikilla $t \in [-1, 1]$.

Todistus. Tapahtuman $\{N = n\}$ sattuessa M saa arvon $\sum_{i=1}^n X_i$. Satunnaisluvun t^M lauseke voidaan näin ollen kirjoittaa muodossa

$$t^M = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N=n\}} t^{\sum_{i=1}^n X_i} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N=n\}} \prod_{i=1}^n t^{X_i},$$

missä oikealla puolella sovitaan, että $\prod_{i=1}^0 = 1$.

(i) Oletetaan, että $0 \le t \le 1$. Tällöin viemällä odotusarvo positiivitermisen summan sisään ja käyttämällä riippumattomuutta nähdään, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t^M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(1_{\{N=n\}} \prod_{i=1}^n t^{X_i}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}t^{X_i}.\end{aligned}$$

Koska kukin X_i on jakautunut kuten X_1, seuraa ylläolevasta että

$$G_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1}(t)^n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}\left(G_{X_1}(t)^N\right) = G_N(G_{X_1}(t)).$$

Koska $\mathbb{Z}_+$-arvoisen satunnaisluvun tngf:lle aina pätee $G(t) \le 1$ kaikilla $t \in [0, 1]$ (harjoitustehtävä), nähdään ylläolevasta kaavasta, että $0 \le G_M(t) \le 1$.

(ii) Kun $|t| \le 1$ on mahdollisesti negatiivinen, voidaan yhtälöä $|t^M| = |t|^M$ käyttäen ensin varmistaa, että

$$\mathbb{E}|t^M| = G_M(|t|) < \infty,$$

joten satunnaisluvun t^M odotusarvo on olemassa ja generoivia funktioita vastaavat potenssisarjat suppenevat itseisesti pisteessä t. Tämän havainnon jälkeen voidaan (i)-kohdan lasku toistaa myös luvulle $t \in [-1, 0)$. □

10 Stokastiset populaatiomallit

10.1 Haarautumisprosessi

Galton–Watson haarautumisprosessi on satunnaisjono $(Z_0, Z_1, \dots)$, joka määritellään kaavoilla $Z_0 = 1$ ja

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{10.1}$$

missä $(X_{n,i})_{n\geq 1, i\geq 1}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita $\mathbb{Z}_+$-arvoisia satunnaislukuja. Ylläolevassa summassa tulkitaan $\sum_{i=1}^{0} = 0$. Kyseinen prosessi mallintaa populaatiota, missä jokainen yksilö elää täsmälleen yhden aikayksikön (sukupolven) ja elikaarensa loppuvaiheessa tuottaa satunnaisen määrän jälkeläisiä, jotka jatkavat lisääntymistä muista riippumatta. Satunnaisluku Z_n kuvaa populaation kokoa n:nnen sukupolven jälkeen ja $X_{n,i}$ voidaan tulkita n:nnen sukupolven i:nnen yksilön jälkeläisten lukumääräksi. Alkuhetkellä populaation koko on $Z_0 = 1$.

Olkoon X satunnaisluku, joka kuvaa geneerisen yksilön jälkeläisten lukumäärää, ja olkoon P_X sitä vastaava jakauma. Tällöin jokainen $X_{n,i}$ noudattaa jakaumaa P_X joukossa $\mathbb{Z}_+$. Jälkeläisten lukumäärän jakauma on populaatiomallin ainoa parametri, joten se määrittää koko satunnaisjonon $(Z_0, Z_1, \dots)$ jakauman. Populaatiomalliin liittyvät keskeiset kysymykset liittyvät pitkän aikavälin käytökseen ($n \to \infty$):

- Voiko populaatio kasvaa rajattoman suureksi?
- Millä tn:llä populaatio kuolee sukupuuttoon?
- Onko mahdollista, että populaatio säilyy elossa rajallisen kokoisena loputtoman kauan?

Seuraavissa alaluvuissa kehitellään teoriaa, jonka avulla ylläoleviin kysymyksiin voidaan vastata.

10.2 Population koon generoiva funktio

Populaation koon jakauma hetkellä n on vaikea laskea suoraan haarautumisprosessin määritelmästä, koska rekursiivisen kaavan (10.1) summausindeksi on satunnainen. Sitä vastoin vastaavan tngf:n laskeminen osoittautuu helpommaksi.

Lause 10.1. *Populaation koon tnfg mielivaltaisella ajanhetkellä $n \geq 1$ toteuttaa*

$$G_{Z_n}(t) = G_X \circ \cdots \circ G_X(t), \quad |t| \leq 1,$$

missä oikealla puolella on yksilön jälkikasvun tnfg:n G_X yhdistetty kuvaus itsensä kanssa n kertaa.

Todistus. Populaation koko ajanhetkellä $n = 1$ on $Z_1 = X_{1,1}$. Koska $X_{1,1}$ noudattaa samaa jakaumaa kuin X,

$$G_{Z_1}(t) = G_{X_{1,1}}(t) = G_X(t)$$

kaikilla t, joille G_X on määritelty. Väite siis pätee, kun $n = 1$.

Tehdään seuraavaksi induktio-oletus, että väite pätee jollain ajanhetkellä $n-1$. Tällöin haarautumisprosessin määritelmän mukaan

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i},$$

missä ylläolevat summattavat ovat riippumattomia ja kukin noudattaa jakaumaa P_X. Lisäksi satunnainen summausindeksi Z_{n-1} voidaan esittää deterministisenä (joskin varsin monimutkaisena) funktiona satunnaisluvuista $(X_{m,i})_{m\le n-1, i\ge 1}$. Koska satunnaisluvut $(X_{m,i})_{m\le n-1, i\ge 1}$ ovat riippumattomia satunnaisluvuista $(X_{n,i})_{i\ge 1}$, voidaan näyttää, että myös Z_{n-1} on riippumaton satunnaisluvuista $(X_{n,i})_{i\ge 1}$. Nyt Lausetta 9.7 soveltamalla havaitaan, että

$$G_{Z_n}(t) = G_{Z_{n-1}}(G_X(t)).$$

Induktio-oletusta käyttämällä nähdään nyt, että väite pätee myös ajanhetkellä n. □

10.3 Haarautumisprosessin trendi

Lause 10.2. *Oletetaan, että yksilön jälkikasvun kokoa kuvaavalla satunnaisluvulla X on odotusarvo $\mathbb{E}X \in (0,\infty)$ ja että X:n tngf on määritelty jossain pisteessä $t_0 > 1$. Tällöin*

$$\mathbb{E}Z_n = (\mathbb{E}X)^n \quad \textit{kaikilla } n \ge 0.$$

Todistus. Lauseen 10.1 avulla voidaan kirjoittaa

$$G_{Z_{n+1}}(t) = G_X(G_{Z_n}(t)).$$

Koska G_X on määritelty pisteessä $t_0 > 1$, on se derivoituva avoimella välilä $(-t_0, t_0)$. Käyttämällä G_X:n jatkuvuutta pisteen 1 ympäristössä voidaan induktion avulla todistaa, että myös G_{Z_n} on derivoituva jollain pisteen 1 sisältävällä avoimella välillä, kaikilla n. Derivoimalla ylläolevan yhtälön molemmat puolet t:n suhteen nähdään, että

$$G'_{Z_{n+1}}(t) \;=\; G'_X(G_{Z_n}(t))\, G'_{Z_n}(t).$$

Sijoittamalla ylläolevaan kaavaan $t = 1$ ja muistamalla, että $G_{Z_n}(1) = 1$, havaitaan että

$$G'_{Z_{n+1}}(1) \;=\; G'_X(1)\, G'_{Z_n}(1).$$

Koska $\mathbb{Z}_+$-arvoisen satunnaisluvun odotusarvo on sitä vastaavan tngf:n derivaatta pisteessä 1 (Lause 9.4), seuraa tästä että

$$\mathbb{E}Z_{n+1} \;=\; \mathbb{E}X\, \mathbb{E}Z_n.$$

Koska ylläoleva kaava pätee kaikilla n, väite seuraa. □

Lauseen seurauksena nähdään, että kun $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}Z_n \to \begin{cases} \infty, & \mathbb{E}X > 1, \\ 1, & \mathbb{E}X = 1, \\ 0, & \mathbb{E}X < 1. \end{cases}$$

Tämä tulos vastaa intuitiota: Jos jokainen väestön yksilö tuottaa keskimäärin yli 1 jälkeläistä, kasvaa väkiluvun odotusarvo eksponentiaalisesti.

10.4 Sukupuuton todennäköisyys

Olkoon

$$\eta = \mathbb{P}(Z_n = 0 \text{ jollain } n \geq 1)$$

todennäköisyys tapahtumalle, että populaatio menee sukupuuttoon. Seuraava tulos kertoo, miten kyseinen luku voidaan määrittää jälkikasvun koon generoivasta funktiosta.

Lause 10.3. *Populaation sukupuuton todennäköisyys η on jälkikasvun koon tngf:n G_X pienin kiintopiste välillä* $[0, 1]$.

Todistus. (i) Näytetään ensiksi, että η on G_X:n kiintopiste. Kirjoitetaan η muodossa

$$\eta = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right)$$

ja todetaan, että tn-mitan jatkuvuuden nojalla

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{r} \{Z_n = 0\}\right).$$

Yllämainittu jatkuvuusominaisuus seuraa yleisen tn-avaruuden tn-mitan aksioomista; sitä käsitellään tarkemmin todennäköisyysteorian syventävillä kursseilla. Seuraavaksi havaitaan, että

$$\bigcup_{n=1}^{r} \{Z_n = 0\} = \{Z_r = 0\},$$

sillä $\{Z_i = 0\} \subset \{Z_j = 0\}$ kaikilla $i \leq j$. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\eta = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{r} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{r\to\infty} \eta_r,$$

missä $\eta_r = \mathbb{P}(Z_r = 0)$.

Generoivia funktioita käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\mathbb{P}(Z_r = 0) = G_{Z_r}(0),$$

ja Lauseen 10.1 avulla

$$G_{Z_r}(0) = G_X(G_{Z_{r-1}}(0)).$$

Näin ollen

$$\eta_r = G_X(\eta_{r-1}) \tag{10.2}$$

kaikilla $r \geq 1$. Koska luvut η ja η_r ovat todennäköisyyksiä, kuuluvat ne välille $[0,1]$ ja G_X on suppenevana potenssisarjana jatkuva kyseisellä välillä. Näin ollen

$$\eta = \lim_{r\to\infty} \eta_r = \lim_{r\to\infty} G_X(\eta_{r-1}) = G_X(\lim_{r\to\infty} \eta_{r-1}) = G_X(\eta).$$

Näin ollen η on G_X:n kiintopiste.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että $t \in [0,1]$ on mielivaltainen G_X:n kiintopiste ja näytetään, että $\eta \leq t$. Todetaan ensiksi, että koska G_X on kasvava välillä $[0,1]$ ja Z_1 jakautunut kuten X, niin

$$\eta_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = G_X(0) \leq G_X(t) = t.$$

Siispä $\eta_1 \leq t$. Toisaalta yhtälön (10.2) ja G_X:n kasvavuuden avulla

$$\eta_2 = G_X(\eta_1) \leq G_X(t) = t.$$

Siispä myös $\eta_2 \leq t$. Näin jatkaen voidaan päätellä, että $\eta_r \leq t$ kaikilla $r \geq 1$. Näin ollen

$$\eta = \lim_{r\to\infty} \eta_r \leq t.$$

□

Esimerkki 10.4. Tarkastellaan populaatiota, missä yksilön jälkeläisten lukumäärä noudattaa joukon $\mathbb{Z}_+$ geometrista jakaumaa parametrilla $p \in (0,1)$, jolloin

$$P_X(k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jälkikasvun koon odotusarvo ja tngf saadaan kaavoista (harjoitustehtävä)

$$\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p} \qquad \text{ja} \qquad G_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)t}, \quad |t| < \frac{1}{1-p}.$$

Funktion G_X kiintopisteet välillä $[0,1]$ ovat toisen asteen yhtälön

$$\frac{p}{1-(1-p)t} = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-p)t^2 - t + p = 0$$

ratkaisuja, joille pätee

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} = \frac{1 \pm |1-2p|}{2(1-p)}.$$

Kiintopisteyhtälön ratkaisut ovat $t = \frac{p}{1-p}$ ja $t = 1$. Lauseen 10.3 nojalla siis sukupuuton todennäköisyys on

$$\eta = \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & \text{kun } p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkiksi tapauksessa $p = 1/7$ jokainen yksilö tuottaa keskimäärin kuusi jälkeläistä ja populaatio kuolee sukupuuttoon tn:llä $\frac{1}{6}$.

10.5 Varma sukupuutto

Populaatio kuolee varmuudella sukupuuttoon, kun $\eta = 1$. Voidaanko jakaumaa P_X tutkimalla helposti nähdä, milloin $\eta = 1$? Vastaus on kyllä, kuten seuraava tulos osoittaa.

Kommentti: Kun $\mathbb{E}X = 1$, tapahtuu silti sukupuutto. Malthus.

Lause 10.5. *Oletetaan, että haarautumisprosessin jälkikasvun koolle X pätee $P_X(0) > 0$.*

(i) Jos $\mathbb{E}X > 1$, niin populaatio säilyy hengissä ikuisesti todennäköisyydellä $1 - \eta \in (0, 1)$.

(ii) Jos $\mathbb{E}X \leq 1$, niin populaatio kuolee sukupuuttoon todennäköisyydellä $\eta = 1$.

Tapauksessa $\mathbb{E}X = 1$ vaikuttaa Lauseen 10.5 tulos olevan ristiriidassa Lauseen 10.2 suhteen, jonka mukaan $\mathbb{E}Z_n = 1$ kaikilla n. Toisaalta populaatio varmuudella lopulta kuolee sukupuuttoon, mutta toisaalta populaation koon odotusarvo on yksi kaikilla n. Tämä silmiinpistävän epäintuitiivinen tulos on tärkeä osoitus siitä, että pelkästään odotusarvoja tuijottamalla ei aina saada todellista kuvaa siitä, mitä satunnaisilmiössä todella tapahtuu.

Todistus. Lauseen 10.3 perusteella sukupuuton todennäköisyys η on tngf:n G_X pienin kiintopiste välillä $[0, 1]$. Koska $G_X(1) = 1$, on G_X:ää vastaavan potenssisarjan suppenemissäde vähintään 1 ja näin ollen G_X on rajatta termeittäin derivoituva avoimella välillä $(-1, 1)$. Tngf:n toinen derivaatta pisteessä $t \in (-1, 1)$ laskettiin kaavassa (9.4) muotoon

$$G_X''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2} P_X(k).$$

Tästä nähdään, että $G_X''(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0, 1)$ ja näin ollen G_X' on kasvava välillä $[0, 1)$. Lauseen 9.6 perusteella $G_X'(u) \to \mathbb{E}X$, kun $u \uparrow 1$. Näin ollen havaitaan, että $G_X'(u) \leq \mathbb{E}X$ kaikilla $u \in (0, 1)$.

(i) Oletetaan ensiksi, että $\mathbb{E}X < 1$. Tästä seuraa, että

$$1 - G_X(t) = G_X(1) - G_X(t) = \int_t^1 G_X'(u)\, du \leq (1 - t)\mathbb{E}X,$$

joten

$$G_X(t) - t \geq 1 - t - (1-t)\mathbb{E}X = (1-t)(1-\mathbb{E}X) > 0$$

kaikilla $t \in [0,1)$. G_X:llä ei siis ole kiintopisteitä välillä $[0,1)$. Näin ollen $\eta = 1$.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että $\mathbb{E}X > 1$. Tällöin $\mathbb{E}X = 1 + \epsilon$ jollain $\epsilon > 0$. Koska $G_X'(u) \to \mathbb{E}X$, kun $u \uparrow 1$ ja G_X' on kasvava välillä $[0,1)$, voidaan päätellä, että $G_X'(u) \geq 1 + \epsilon/2$ jollain avoimella välillä $(u_0, 1)$. Näin ollen

$$1 - G_X(u_0) = G_X(1) - G_X(u_0) = \int_{u_0}^1 G_X'(u)\, du \geq (1 + \epsilon/2)(1 - u_0).$$

Erityisesti $1 - G_X(u_0) > 1 - u_0$, joten funktiolle $f(t) = G_X(t) - t$ pätee $f(u_0) < 0$. Toisaalta $f(0) = P_X(0) > 0$, joten jatkuvuuden perusteella f:llä on vähintään yksi nollakohta välillä $(0, u_0)$. Kyseinen nollakohta on G_X:n kiintopiste, joten G_X:n pienin kiintopiste välillä $[0,1)$ toteuttaa $\eta \leq u_0 < 1$. Toisaalta yhtälöstä $G_X(0) = P_X(0) > 0$ nähdään, että 0 ei ole G_X:n kiintopiste. Näin ollen $\eta \in (0,1)$.

(iii) Oletetaan nyt, että $\mathbb{E}X = 1$. Tehdään lisäoletus, että X:n tngf:n suppenemissäde on aidosti yli yksi, jolloin G_X on rajatta termeittäin derivoituva luvun yksi ympäristössä. Lauseen väittämä pitää paikkansa myös ilman tätä lisäoletusta (ks. [2, Luku 5.4]), mutta todistus on teknisesti hankalampi, koska tällöin joudutaan tutkimaan G_X:n derivaattojen vasemmanpuoleisia raja-arvoja luvun yksi läheisyydessä.

Nyt $\mathbb{E}(X-1) = 0$, joten

$$P_X(0) = P_X(0) + \mathbb{E}(X-1) = P_X(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)P_X(k) = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)P_X(k).$$

Koska yllä $P_X(0) > 0$ ja oikeanpuolimmaisen summan termit ovat positiivisia, voidaan päätellä, että $P_X(\ell) > 0$ jollain $\ell \geq 2$. Merkitään mukavuuden vuoksi $p_\ell = P_X(\ell)$. Näin ollen

$$G_X''(t) \geq \ell(\ell-1)p_\ell t^{\ell-2}$$

välillä $[0,1]$, josta päätellään, että kaikilla $t_0 > 0$ ja kaikilla $t \in [t_0, 1]$ pätee

$$G_X''(t) \geq \ell(\ell-1)p_\ell t_0^{\ell-2} = c.$$

Näin ollen

$$1 - G_X'(t) \geq \mathbb{E}X - G_X'(t) = G_X'(1) - G_X'(t) = \int_t^1 G_X''(u)\, du \geq c(1-t)$$

ja integroimalla jälleen, nähdään että

$$\int_t^1 (1 - G_X'(u))\, du \geq c\int_t^1 (1-u)\, du = c\int_0^{1-t} v\, dv = \frac{c}{2}(1-t)^2.$$

Käyttämällä tietoa $G_X(1) = 1$ havaitaan, että

$$\int_t^1 (1 - G'_X(u))\, du = (1 - t) - (G_X(1) - G_X(t)) = G_X(t) - t,$$

joten kaikilla $t \geq t_0$ pätee

$$G_X(t) - t \geq \frac{c}{2}(1 - t)^2 > 0.$$

Koska t_0 oli mielivaltaisesti valittu välin $(0, 1)$ luku, voidaan todeta, että $G_X(t) > t$ kaikilla $t \in (0, 1)$. Näin ollen G_X:llä ei ole kiintopisteitä välillä $(0, 1)$, joten $\eta = 1$. □

11 Satunnaisverkot

11.1 Solmut ja linkit

Suuntaamaton verkko on järjestetty pari $G = (V, E)$ missä E on joukon V järjestämättömien parien $V^{(2)}$ osajoukko. Joukon $V = V(G)$ alkioita kutsutaan verkon *solmuiksi* ja joukon $E = E(G)$ alkioita sen *linkeiksi*. Verkon solmuparia merkitään lyhyesti $xy = \{x, y\}$, ja määritelmän mukaan xy ja yx tarkoittavat samaa solmuparia. Kun $xy \in E(G)$ sanotaan, että linkki xy *kytkee* solmut x ja y. Tällöin solmut x ja y ovat toistensa *naapureita*. Verkon *koko* on sen solmujen lukumäärä $|V(G)|$.

Suunnattu verkko määritellään samaan tapaan, mutta siinä linkit ovat järjestettyjä pareja, eli jokaisella linkillä on suunta. Tässä monisteessa rajoitutaan käsittelemään äärellisiä suuntaamattomia verkkoja. Jatkossa termi *verkko* aina tarkoittaa suuntaamatonta verkkoa.

Esimerkki 11.1 (Tyhjä ja täydellinen verkko)**.** Solmujoukon V *tyhjä verkko* on verkko $(V, \emptyset)$. Tyhjässä verkossa mikään solmupari ei ole kytketty. Solmujoukon V *täydellinen verkko* on verkko $(V, V^{(2)})$. Täydellisessä verkossa kaikki solmut ovat toistensa naapureita.

Verkon $G = (V, E)$, jonka solmujoukko on $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, *naapuruusmatriisi* on $n \times n$ -matriisi X, missä

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{jos solmut } v_i \text{ ja } v_j \text{ ovat kytkettyjä,} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Suuntaamattoman verkon naapuruusmatriisi on määritelmän mukaan symmetrinen ja sen diagonaalialkiot ovat nollia. Verkon G rakenne määrittyy täysin naapuruusmatriisista X, sillä

$$E(G) = \left\{ v_i v_j \in V^{(2)} : X_{i,j} = 1 \right\}.$$

Koska naapuruusmatriisi X on aina symmetrinen ja sen diagonaali nolla, riittää naapuruusmatriisin ja sitä myöten koko verkon linkkijoukon määräämiseksi tuntea alkiot $(X_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n)$.

Solmun x *naapurusto* on joukko

$$N(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$$

ja solmun *aste* on sen naapureiden lukumäärä $d(x) = |N(x)|$. Kun $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, solmun v_i aste saadaan naapuruusmatriisista rivisummana

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} X_{i,j}.$$

11.2 Satunnaisverkko

Olkoon (Ω, P) diskreetti tn-avaruus ja V jokin äärellinen joukko. Solmujoukon V *satunnaisverkko* on $\mathcal{G}(V)$-arvoinen satunnaismuuttuja

$$G : \Omega \to \mathcal{G}(V),$$

missä

$$\mathcal{G}(V) = \{(V, E) : E \subset V^{(2)}\}$$

on solmujoukolla V määriteltyjen verkkojen kokoelma. Verkkojoukko $\mathcal{G}(V)$ on äärellinen, vaikkakin valtavan suuri: kokoa $|V| = n$ olevassa solmujoukossa on $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$ järjestämätöntä solmuparia, joten $|\mathcal{G}(V)| = 2^{\binom{n}{2}}$. Satunnaisverkon G *jakauma* on verkkojoukon $\mathcal{G}(V)$ tn-funktio

$$P_G(g) = \mathbb{P}(G = g), \quad g \in \mathcal{G}(V).$$

Kokoluokkaa n olevan satunnaisverkon G naapuruusmatriisi $X = X(G)$ on satunnaismatriisi eli $\{0,1\}^{n \times n}$-arvoinen satunnaismuuttuja. Huomataan myös, että $\{0,1\}$-arvoinen satunnaismuuttuja $X_{i,j}$ on indikaattori tapahtumalle, että solmut v_i ja v_j ovat kytkettyjä. Kun solmujoukon numerointi on kiinnitetty, tarjoavat satunnaisverkon jakauma ja satunnaisen naapuruusmatriisin jakauma kaksi vaihtoehtoista ja ekvivalenttia tapaa tarkastella satunnaisverkkoa.

11.3 Riippumattomasti kytketty satunnaisverkko

Solmujoukon $V = \{1, \ldots, n\}$ satunnaisverkko G on *riippumattomasti kytketty* kytkentätodennäköisyydellä $p \in (0, 1)$, jos sillä on jakauma

$$\mathbb{P}(G = g) \;=\; p^{|E(g)|}(1-p)^{\binom{n}{2} - |E(g)|}, \quad g \in \mathcal{G}(V).$$

Tämä satunnaisverkko tunnetaan yleisesti *Erdősin–Rényin satunnaisverkkona.* Joskus siitä käytetään myös nimeä binominen satunnaisverkko tai Bernoulli-satunnaisverkko.

Tarkastetaan, että yllä esitetty lauseke todellakin on verkkojoukon $\mathcal{G}(V)$ tn-funktio. Merkitään symbolilla $\mathcal{G}_k = \{g \in \mathcal{G}(V) : |E(g)| = k\}$ niitä solmujoukon V verkkoja, joissa on täsmälleen k linkkiä. Koska verkon kaikkien solmuparien kokonaismäärä on $m = \binom{n}{2}$, havaitaan että $|\mathcal{G}_k| = \binom{m}{k}$. Pilkkomalla ylläolevan kaavan summa osajoukkoihin $\mathcal{G}_k$ nähdään, että

$$\sum_{g \in \mathcal{G}(V)} \mathbb{P}(G = g) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \mathbb{P}(G = g) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Näin ollen binomikaavaa $(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^m y^{r-k}$ käyttämällä nähdään, että

$$\sum_{g \in \mathcal{G}(V)} \mathbb{P}(G = g) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = (p + (1-p))^m = 1.$$

Näin ollen yllä määritelty kaava todellakin on verkkojoukon $\mathcal{G}(V)$ tn-funktio.

Seuraava tulos kertoo, miksi riipumattomasti kytketty satunnaisverkko on nimetty juuri niin kuin se on.

Lause 11.2. *Olkoon $X = (X_{i,j})$ riippumattomasti kytketyn satunnaisverkon G naapuruusmatriisi. Tällöin $(X_{i,j} : 1 \le i < j \le n)$ ovat riippumattomia* Ber(p)*-jakautuneita satunnaismuuttujia.*

Todistus. (i) Näytetään ensin, että satunnaisverkon G linkkien lukumäärää kuvaava satunnainen kokonaisluku $|E(G)|$ noudattaa Bin(m, p)-jakaumaa, missä $m = \binom{n}{2}$. Nyt

$$\mathbb{P}(|E(G)| = k) = \mathbb{P}(G \in \mathcal{G}_k),$$

missä $\mathcal{G}_k = \{g \in \mathcal{G}(V) : |E(g)| = k\}$, kuten yllä. Mutta yllä jo nähtiin, että tämä lauseke on yhtä kuin

$$\mathbb{P}(|E(G)| = k) = \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \mathbb{P}(G = g) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

(ii) Valitaan jokin solmupari $k\ell$, missä $k < \ell$, ja näytetään, että $X_{k,\ell}$ on Ber(p)-jakautunut. Symmetrian perusteella on selvää, että $\mathbb{P}(X_{k,\ell} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = 1)$ kaikilla $i < j$. Näin ollen

$$\mathbb{E} \sum_{(i,j):i<j} X_{i,j} = \sum_{(i,j):i<j} \mathbb{E} X_{i,j} = m \mathbb{E} X_{k,\ell} = m \mathbb{P}(X_{k,\ell} = 1).$$

Toisaalta nähdään, että $\sum_{(i,j):i<j} X_{i,j}$ on täsmälleen linkkien kokonaismäärä $|E(G)|$. Koska (i):n nojalla $|E(G)|$ on Bin(m, p)-jakautunut, pätee $\mathbb{E}|E(G)| = mp$. Siispä ylläolevasta yhtälöstä seuraa, että

$$\mathbb{P}(X_{k,\ell} = 1) = p.$$

Koska $X_{k,\ell}$:n arvojoukko on $\{0,1\}$, seuraa tästä, että $X_{k,\ell}$ on $\mathrm{Ber}(p)$-jakautunut.

(iii) Valitaan jotkin luvut $x_{i,j} \in \{0,1\}$, missä $1 \le i < j \le n$. Tällöin tapahtuma

$$A = \{X_{i,j} = x_{i,j} \text{ kaikilla } 1 \le i < j \le n\}$$

vastaa tapahtumaa, että satunnaisverkko G realisoituu tilaan (V, E_x), missä

$$E_x = \{ij \in V^{(2)} : x_{\min(i,j),\max(i,j)} = 1\}.$$

Näin ollen

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \mathbb{P}(G = (V, E_x)) \;=\; p^{|E_x|}(1-p)^{m-|E_x|} \;=\; p^k(1-p)^{m-k},$$

missä $k = |E_x| = \sum_{i<j} x_{i,j}$. Toisaalta (ii)-kohdan nojalla pätee

$$\mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j}) = p^{x_{i,j}}(1-p)^{1-x_{i,j}},$$

joten

$$\prod_{i<j} \mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j}) = \prod_{i<j} p^{x_{i,j}}(1-p)^{1-x_{i,j}} = p^k(1-p)^{m-k}.$$

Pätee siis

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i<j}\{X_{i,j} = x_{i,j}\}\right) = \prod_{i<j} \mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j})$$

kaikilla $x_{i,j} \in \{0,1\}$. Näin ollen satunnaisluvut $(X_{i,j} : i < j)$ ovat riippumattomat. □

12 Pienten lukujen laki

Poisson-jakauma parametrilla $\lambda > 0$ on tn-funktio $\mu : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, jolle

$$\mu(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \ge 0.$$

Seuraava tulos selittää, miksi Poisson jakauma on hyvin keskeinen jakauma monien satunnaisilmiöiden mallintajana. Lauseen tulos voidaan vaihtoehtoisesti ilmaista muodossa $X_n \xrightarrow{d} X$, eli satunnaisjono (X_n) suppenee jakaumaltaan kohti satunnaislukua X (ks. Liite A).

Lause 12.1. *Oletetaan, että satunnaisluku X_n noudattaa $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$-jakaumaa kaikilla n, missä $\lambda > 0$. Tällöin kaikilla $k \ge 0$ pätee*

$$\mathbb{P}(X_n = k) \;\to\; \mathbb{P}(X = k), \quad \text{kun } n \to \infty,$$

missä X on Poisson-jakautunut satunnaisluku parametrilla λ.

Todistus. Olkoon X Poisson-jakautunut parametrilla λ. Valitaan jokin $k \geq 0$. Kaikilla $n \geq k$ pätee

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\left(\frac{n!}{n^k(n-k)!}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Ylläolevan tulon keskimmäinen tekijä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} = \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right),$$

josta nähdään, että

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} \to 1, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Oikeanpuolimmaiselle tekijälle puolestaan pätee

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}.$$

Yhdistämällä yllä tehdyt havainnot nähdään, että

$$\mathbb{P}(X_n = k) \;\to\; e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \;=\; \mathbb{P}(X = k).$$

□

Esimerkki 12.2. Www-palvelimelle saapuu valitun sekunnin aikana keskimäärin $\lambda = 30$ kyselyä. Mitä jakaumaa saapuvien kyselyjen lukumäärä N likimain noudattaa? Oletetaan, että kyselyt aiheutuvat suuresta joukosta riippumattomia ja identtisiä toimijoita, joita on n kappaletta. Olkoon A_i tapahtuma, että toimija i tuottaa kyselyn valitun sekunnin aikana. Tällöin

$$N = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i},$$

missä oletuksen mukaan indikaattorit 1_{A_i} ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Merkitään $p = \mathbb{E}1_{A_i} = \mathbb{P}(A_i)$. Satunnaisluvun N odotusarvolle pätee

$$\lambda = \mathbb{E}N = np,$$

joten $p = \lambda/n$. Näin ollen N noudattaa $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$-jakaumaa. Käytännön tilanteissa lukua n ei useinkaan tunneta tarkasti; tiedetään vain, että n on suuri luku. Tällöin voidaan tehdä arvio $n \to \infty$ ja käyttää pienten lukujen lakia (Lause 12.1), jonka mukaan $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ on lähellä Poisson-jakaumaa parametrilla λ.

A Suppeneminen jakaumaltaan

Jono satunnaismuuttujia (X_n) *suppenee jakaumaltaan* kohti satunnaismuuttujaa X, merkitään $X_n \xrightarrow{d} X$, jos

$$\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$$

kaikilla jatkuvilla ja rajoitetuilla funktioilla f. Kun satunnaismuuttujat X_n ja X saavat arvonsa numeroituvassa tila-avaruudessa S, riittää yllä tarkastella pelkästään rajoitettuja funktioita $f : S \to \mathbb{R}$, sillä numeroituvalla avaruudella (joka aina varustetaan diskreetillä topologialla) jokainen kuvaus on jatkuva.

Lause A.1. *Seuraavat ovat yhtäpitäviä numeroituvan tila-avaruuden S satunnaisjonoille:*

(i) $X_n \xrightarrow{d} X$.

(ii) $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$ *kaikilla* $A \subset S$.

(iii) $\mathbb{P}(X_n = s) \to \mathbb{P}(X = s)$ *kaikilla* $s \in S$.

Todistus. Todistetaan lause kolmessa vaiheessa näyttämällä toteen seuraamukset (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i). Kaksi ensimmäistä vaihetta on helppoja, kun taas kolmas vaatii vähän enemmän työtä.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Oletetaan, että (i) pätee ja valitaan mielivaltainen $A \subset S$. Funktio $f(s) = 1_A(s)$ on nyt rajoitettu, joten (i):n nojalla

$$\mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{E}1_A(X_n) \to \mathbb{E}1_A(X) = \mathbb{P}(X \in A).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Oletetaan, että (ii) pätee ja valitaan mielivaltainen $s \in S$. Määritellään $A = \{s\}$. Tällöin (ii):n nojalla

$$\mathbb{P}(X_n = s) = \mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X = s).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Oletetaan, että (iii) pätee ja valitaan jokin rajoitettu funktio $f : S \to \mathbb{R}$. Valitaan myös jokin mielivaltaisen pieni $\epsilon > 0$. Esitetään S numeroimalla sen alkiot muodossa $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ ja merkitään $C_k = \{s_1, \dots, s_k\}$. Koska $\sum_{j=1}^{\infty} P_X(s_j) = 1$, voidaan valita luku k siten, että

$$\mathbb{P}(X \in C_k^c) = \sum_{j=k+1}^{\infty} P_X(s_j) \le \epsilon.$$

Kirjoitetaan tarkasteltavana olevien odotusarvojen erotus muodossa

$$\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X) \;=\; \Delta_n + \mathbb{E}f(X_n)1_{\{X_n \in C_k^c\}} - \mathbb{E}f(X)1_{\{X_n \in C_k^c\}}, \qquad \text{(A.1)}$$

missä

$$\Delta_n = \mathbb{E}f(X_n)1_{\{X_n \in C_k\}} - \mathbb{E}f(X)1_{\{X_n \in C_k\}},$$

Oletuksen (iii) nojalla

$$\Delta_n = \sum_{s \in C_k} f(s)(P_{X_n}(s) - P_X(s)) \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Seuraavaksi nähdään, että yhtälön (A.1) oikean puolen toinen termi toteuttaa

$$\left| \mathbb{E}f(X_n)1_{\{X_n \in C_k^c\}} \right| \le ||f||\, \mathbb{P}(X_n \in C_k^c) = ||f|| \left(\mathbb{P}(X \in C_k^c) + \Delta_n' \right),$$

missä $||f|| = \sup_{s \in S} |f(s)|$ ja

$$\begin{aligned} \Delta_n' &= \mathbb{P}(X_n \in C_k^c) - \mathbb{P}(X \in C_k^c) \\ &= \mathbb{P}(X \in C_k) - \mathbb{P}(X_n \in C_k) \\ &= \sum_{s \in C_k} (P_X(s) - P_{X_n}(s)) \to 0, \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$ oletuksen (iii) nojalla. Näin ollen siis

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| &\le |\Delta_n| + ||f|| \left(2\mathbb{P}(X_n \in C_k^c) + |\Delta_n'| \right) \\ &\le |\Delta_n| + ||f|| \left(2\epsilon + |\Delta_n'| \right). \end{aligned}$$

Koska $|\Delta_n| \le \epsilon$ ja $|\Delta_n'| \le \epsilon$ kaikilla riittävän suurilla n, nähdään että

$$|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \le (1 + 3||f||)\epsilon$$

kaikilla riittävän suurilla n. Koska ϵ oli mielivaltaisen pieni, (i) seuraa. □

B Yleinen tn-avaruus ja satunnaisluku

Kokoelma $\mathcal{A}$ jonkin pohjajoukon Ω osajoukkoja on *sigma-algebra*, jos se on suljettu komplementtien, numeroituvien yhdisteiden ja numeroituvien leikkausten suhteen. Jos $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, niin tällöin siis myös A^c, $\cup_k A_k$ ja $\cap_k A_k$ kuuluvat kokoelmaan $\mathcal{A}$. Kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ on *todennäköisyysmitta*, jos $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ja $\mathbb{P}(\cup_k A_k) = \sum_k \mathbb{P}(A_k)$ aina kun $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ ovat erillisiä. Kolmikko $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on *tn-avaruus*, jos $\mathcal{A}$ on Ω:n sigma-algebra ja $\mathbb{P}$ sen tn-mitta.

Reaaliakselin *Borelin sigma-algebra* $\mathcal{B}$ on pienin sigma-algebra, joka sisältää kaikki reaaliakselin avoimet ja suljetut osajoukot. Borelin sigma-algebran jäseniä kutsutaan *Borel-joukoiksi*. Borel-joukkoja ovat reaaliakselin avoimet ja suljetut joukot; avointen ja suljettujen joukkojen komplementit, numeroituvat leikkaukset ja yhdisteet; näiden komplementit, numeroituvat leikkaukset ja yhdisteet; näiden komplementit, numeroituvat leikkaukset ja yhdisteet; jne.

Yleisellä tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ määritelty kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaisluku*, jos $X^{-1}B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ jokaisella Borel-joukolla $B \subset [0,1]$. Näitä asioita käsitellään tarkemmin todennäköisyysteorian syventävillä kursseilla.

Viitteet

[1] M. Bloznelis. Degree and clustering coefficient in sparse random intersection graphs. *Ann. Appl. Probab.*, 23(3):1254–1289, 2013.

[2] G. R. Grimmett and D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 3rd edition, 2001.

[3] R. van der Hofstadt. Random graphs and complex networks. Lecture notes. http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf, 2012.

[4] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, second edition, 2002.

[5] T. Kilpeläinen. Analyysi 3. Luentomoniste. Jyväskylän yliopisto. http://users.jyu.fi/~terok/opetus/analyysi3/analyysi3.pdf, 2013.

[6] M. E. J. Newman. Properties of highly clustered networks. *Phys. Rev. E*, 68:026121, Aug 2003.