Aaltoyhtälö, muuttujien erottelu ja Fourier-sarjat, V3 syksy 2002

5.12.02, Heikki Apiola

Viitteitä

KRE luku 11, 11.1 – 11.3

Tiivistelmä

Käsittelimme viimeisellä luennolla Fourier-sarjojen sovellutuksena osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisemista. Kyseessä on 1-ulotteinen aaltoyhtälö. Johdantokalvojen kopioita Astridin huoneen ovenpielessä, mutta samat asiat löytyvät KRE:sta.

Asia käsiteltiin lyhyessä ajanjaksossa ja kaiken lisäksi luennolla tuli pieni epäjohdonmukaisuus siitä syystä, että vakio c^2 vaihtui välillä epähuomiossa väärälle puolelle.

Harjoituksista kantautui viestiä, että aihe ei oikein vielä kypsynyt.

Asiantilan parantamiseksi tämä teksti. Siinä edetään KRE-kirjan järjestystä ja merkintöjä noudattaen, hieman tehtävää vielä yksinkertaistaen.

Aaltoyhtälö (1-ulotteinen)

Värähtelevä kieli on pingotettu ja kiinnitetty päistään, vasen pää Origoon, oikea siitä etäisyydelle L.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Reunaehdot (RE): $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$ (Päät ovat paikallaan aina.)
Alkuehdot:
AE$_1$: $u(x,0) = f(x)$ (annettu alkupoikkemaprofiili)
AE$_2$: $u_t(x,0) = g(x)$ (annettu alkunopeusprofiili).

Yleisperiaate: Osittaisdiffyhtälöiden teoria ja ratkaiseminen on paljon monimutkaisempaa kuin tavallisten.

Ote kirjasta ... *Anna Karenina ...*

Yleisen ratkaisun etsiminen ei ole yleensä mielekästä, perhe on aivan liian suuri (kyseessä on pikemminkin vähintään koko suku).

Strategiamme: Etsimme riittävän yksinkertaista ratkaisufunktioluokkaa, jonka puitteissa haemme mahdollisimman yleistä ratkaisujoukkoa, jota supistamme vasta pakon edessä, kun vastaan tuleva ehto sitä vaatii. Näin pelaten pyrimme ratkaisuun, joka toteuttaa kaikki vaadittavat ehdot.

Askel 1, osittaisdiffyhtälö hajoaa kahdeksi tavalliseksi

Yrite: $u(x,t) = F(x)G(t)$. Sijoitetaan diffyhtälöön, saadaan:

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

jaetaan tulolla $F(x)G(t)c^2$, jolloin saadaan

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Tämä on mahdollista vain, jos molemmat puolet ovat = sama vakio, sanokaamme k.

Askel 2, reunaehdot

$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \quad \forall t > 0.$

Koska emme ole kiinnostuneita identtisesti häviävästä ratkaisusta [1]

$u(x,t) \equiv 0$, on oltava $F(0) = 0, \quad F(L) = 0.$

Huom: Pyrimme koko ajan **säilyttämään niin paljon vapausasteita kuin mahdollista**, jotta voisimme saada kaikki vaadittavat ehdot toteutumaan.

[1] Nollaratkaisu ei voi toteuttaa alkuehtoa, ellei alkuehto ole 0-funktio, mikä tuskin ketään kiinnostaa.

Mitä rajoituksia on asetettava k:lle?

(1) Voisiko tulle kyseeseen $k = 0$. Tällöin olisi $F(x) = ax + b$, jolloin alkuehdot pakottaisivat kertoimet nolliksi, ei siis käy.

(2) Entä, jos $k > 0$? Tällöin F-yhtälön ratkaisut olisivat muotoa

$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, missä $\mu = \sqrt{k}$. RE:t pakottaisivat jälleen : $A = B = 0$, $\Longrightarrow$ $F \equiv 0$

(3) Jäljelle jää tapaus $k < 0$.

k:n oltava negatiivinen

Merk. $k = -p^2$.

Diffyhtälöt ovat siten:

$$\begin{cases} F''(x) + p^2 F(x) = 0 \\ G''(t) + c^2 p^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

Siten $F(x) = A\cos px + B\sin px$.

Reunaehdoista seuraa siis: $0 = F(0) = A$, joka toiseen RE:oon yhdistettynä antaa $0 = F(L) = B\sin px$.

Koska B ei voi olla 0 (muuten triv. ratk.), on oltava $pL = n\pi$

Siten ainoat mahdolliset p:n arvot ovat $p = \frac{n\pi}{L}$.

Kaikki [2] **mahdolliset diffyhtälön ja RE:t toteuttavat ratkaisut** ovat siten muotoa

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L} G(t),$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja missä $G(t)$ toteuttaa G-yhtälön. Tässä valittiin B-kerroin 1:ksi, sillä se voidaan yhdistää $G(t)$:n kertoimiin, kuten kohta nähdään.

G-yhtälön ratkaisut

Merk. $\lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}$, jolloin G-yhtälö on:

$$G''(t) + \lambda_n G(t) = 0.$$

[2] Tarkemmin: kaikki muuttujien erottelumenetelmällä saatavat

Yleinen ratkaisu: $G_n(t) = B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t$.

Siten tehtävän (diff. yht + RE:t) ratkaisuja ovat funktiot

$u_n(x,t) = (B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$.

Yksinkertaistavasta toisesta AE:sta seuraa heti: $B_n^* = 0$ (derivoidaan t:n suhteen ja sijoitetaan $t = 0$).

Näin olemme saaneet funktioperheen, jonka kaikki jäsenet toteuttavat diffytälön ja RE:t sekä lisäksi jälkimmäisen AE:n. Tässä se on:

$u_n(x,t) = (B_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$.

Vapaasti valittavia parametreja on kutakin n:n arvoa kohti kerroin B_n.

Askel 3, alkuehdot

Käsittelemme siis yksinkertaisuuden vuoksi vain tapauksen, jossa

AE$_1$: $u(x,0) = f(x)$
AE$_2$: $u_t(x,0) = 0$.

Yleisempi tapaus ei ole juurikaan mutkikkaampi (vrt. KRE), mutta lausekkeet lyhenevät senverran, että esitys tulee hiukan mukavammaksi opiskella.

Jos alkuehtofunktiomme $f(x)$ ei ole minkään funktion $\sin\frac{n\pi x}{L}$ vakiokerrannainen, eivät funktiot $u_n(x,t)$ sellaisenaan johda tulokseen.

Nyt tulee koko homman hienous vastaan

Ensinnäkin, diffyhtälö on lineaarinen, joten $\sum u_n(x,t)$ toteuttaa diffyhtälön. Lisäksi se tot. RE:t, koska nämä ovat homogeniset (arvoina 0).

Kun termeittäin derivointi on sallittua, voidaan tämä ulottaa myös äärettömälle summalle, jolloin AE$_1$ merkitsee vaatimusta:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Vielä meillä on takataskussamme vapaasti valittavat B_n-kertoimet. Ehtomme toteutuu siten valitsemalla B_n-kertoimet alkuehtofunktion sinisarjan kertoimiksi, ts. f:n puolen jakson pariton laajennus kehitetään Fourier-sarjaksi.

Ratkaisu tehtävään on siis:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\lambda_n t,$$

missä $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ ja

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$