Teknillinen korkeakoulu Apiola/Ebeling
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 7 (viikko 43 , 29.10 – 1.11.2002)

Alkuviikko (AV)

1. (a) Todista "lapsellinen" lause. Olkoon näyttämönä sisätuloavaruus V. Jos siellä $\mathbf{v}$ on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vastaan, niin se on kohtisuorassa koko aliavaruutta $sp\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vastaan.

   (b) Olkoon $M = sp\{[1, -2, 1]\} \subset \mathbb{R}^3$. Muodosta avaruus $M^\perp$ (Kirjoita ko. "avaruuden" yhtälö).

2. Muodosta matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ QR - hajotelma ja määritä sen avulla

   PNS-ratkaisu yhtälölle $Ax = b$, missä $b = [-1, 6, 5, 7]^T$

   Mikä on PNS-virhe ("residuaali") $||Ax - b||$?

   Kirjoita myös normaaliyhtälöt (mutta ei tarvitse ratkaista).

3. Useissa tapauksissa yrityksen kuluja myyntimäärän funktiona voidaan kuvata kolmannen asteen käyrällä $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. Tässä ei oteta kiinteitä kuluja mukaan, joten vakiotermi puuttuu.

   Muodosta datapisteisiin $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ liittyvä matriisi A ja kirjoita sen avulla tehtävä muotoon, josta sen voit Maplella ratkaista. (Normaaliyhtälöt tai QR.)

   (Jatkuu LV)

4. Ratkaise (AA)-tehtävä $8y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = -0.2$, $y'(0) = -0.325$

5. Muodosta yleinen ratkaisu yhtälölle $y'' + 2ky' + k^2y = 0$.

6. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 4y' + 13y = \cos t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

Ohjeita

Tarkoitus on, että opiskelet 2. kertaluvun lineaariset vakiokertoimiset esim. KRE-kirjasta. Tässä perusasiat:

- (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erityinen.
- (HY)-yrite: $y = e^{\lambda t}$ johtaa karakteristiseen yhtälöön λ:n määräämiseksi.

  Tapaukset:
  - Erisuuret reaalijuuret — harvinaisen selvä tapaus.
  - Kompleksiset liittoluvut $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Tällöin päästään (*Eulerin kaavan avulla*) reaaliseen kantaan $\{e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t\}$.
  - Kaksoisjuuren λ tapauksessa perimätieto kehottaa hakemaan toista LRT ratkaisua muodossa $te^{\lambda t}$
- (EHY)-yritteille on omat sääntönsä, niitä esitellään KRE-kirjassa aika laajasti. Meille riittäkööt muutamat tyyppitapaukset, yleensä yritemuodot annetaan, tai ne ovat tosi luonnollisia.

Loppuviikko (LV)

1. (a) Osoita, että matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

   sarakkeet ovat ortogonaaliset.

   (b) Olkoon U matriisi, joka saadaan normeeraamalla A:n sarakkeet. Laske U^TU ja UU^T ja vertaa.

(c) Muodosta satunnaislukuvektori $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^8$ ja laske $\mathbf{p} = UU^T\mathbf{y}$ ja $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$. Selvitä, miksi $\mathbf{p} \in$col(A). Totea, että $z \perp$ col(A) (eli $z \in col(A)^{\perp}$) .

(d) Anna tälle esitykselle $\mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{z}$ sille kuuluva arvo.

2. Jatka yrityksen kuluselvitystä, kun annettuna on seuraavat datapisteet (yksikkönä voi olla vaikka tuhat euroa): $(4, 1.58), (6, 2.08), (8, 2.5), (10, 2.8), (12, 3.1), (14, 3.4), (16, 3.8), (18, 4.32)$, Laske vaikka molemmilla tavoilla (normaliyht, QR). Piirrä datapisteet ja mallin antama käyrä. (Kts. LSQ.mws:stä mallia ainakin piirtoon.)

3. Alla olevat matriisit kertovat Lämpötilat Pariisissa vuoden ajalta siten, että ensimmäisessä ovat kuukaudet tammi–kesä ja jälkimmäisessä heinä-joulu. Ensimmäinen rivi on kuukauden ylin ja toinen alin lämpötila.

$$\begin{bmatrix} 55 & 55 & 59 & 64 & 68 & 75 \\ 39 & 41 & 45 & 46 & 55 & 61 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 81 & 81 & 77 & 70 & 63 & 55 \\ 64 & 64 & 61 & 54 & 46 & 41 \end{bmatrix}$$

(Data on esitetty kahtena matriisina puhtaasti "näyttöteknisistä" syistä.)

Kannattaa ensitöiksi muuttaa *Fahrenheitit Celsiuksiksi*. Tee ensin Maplessa matriisi, vaikkapa `PariisiF` ja sitten

```
PariisiC:=map(evalf@convert,PariisiF,temperature, degF, degC);
```

Sovita sinimuotoinen malli kumpaankin dataan (PNS). Kun aikaa mitataan kuukausissa, on luonnollista ottaa 12-jaksoinen funktio:

$$f(T) = c_1 + c_2 \cos(\frac{2\pi}{12}T) + c_3 \sin(\frac{2\pi}{12}T)$$

Piirrä molemmissa tapauksiss datapisteet ja PNS-sovitteet. Kirjoita tulos myös muotoon $T_0 + A\cos(\frac{2\pi}{12}T - \delta)$, joka näyttää sen muodossa "keskiarvo + amplitudi $\times$ cos-termi".

4. Pikku projektityö, sopii hyvin oppilasparille, mutta yksin tehtäväksikään ei pitäisi olla liian työläs. Annetaan pisteitä max 4 p. riippuen työn ansioista ja perusteellisuudesta. (Annetaan lisäaikaa viikko , pe 1.11 saakka)

Tutustu jaettuihin sivuihin aiheesta "Linear predictive coding". (Kirjasta *Boggess–Narchowich: A first Course in Wavelets with Fourier Analysis*) Kirjoita Maple ws:lle lyhyt kuvaus asiasta.

Tähän liittyen sovella lineaarista ennustavaa koodausta lukujonon pakkaamiseen. Ajatuksena on lähettää lähes jaksollinen merkkijono verkon kautta vastaanottajalle siten, että dataa tiivistetään merkittävästi.

Olkoon $X = (x_1, \ldots, x_N)$, ja olkoon jono jaksollinen, jaksona $p << N$. Esimerkiksi $x_j = \sin(j\pi/3), \quad 1 \le j \le N = 60$. Tässä siis $p = 6$.

Sovella lineaarista ennustavaa koodausta kertoimien $a_1, \ldots, a_p$ laskemiseski. Virheen pitäisi olla 0, lukuunottamatta pyöristysvirheitä. Häiritse jonoa pienellä satunnaisella virheellä. Tätä varten voit määritellä funktion `randV`, kts. kohtaa Maple-avustusta.

Voit kokeilla satunnaislisäystä vaikka suuruusluokaltaan `randV(N)`:n suoraan antamaa tai esim. `0.5*randV(N)` tms. Valitse sopiva hyväksymiskriteeri, kuten virhetoleranssi luokkaa 0.1. Montako termiä yli $p = 6$:n joudut siirtämään? Vertaa alkuperäistä ja siirrettyä kuvaa. (Voit tehdä vapaamuotoisia muunnelmia vaihdellen toleranssia ja muita parametreja.)

5. Vaihtoehtoisena pikku projektina voit käsitellä tehtävää Lay 6.5 teht, 26 s. 417, joka liittyy signaalien suodatukseen (johdantoesimerkki differenssiyhtälöihin, alipäästösuodatin). Hiukan suppeampi kuin edellinen. Valitse siis jompi kumpi (Tähänkin lisäaikaa viikko , pe 1.11 saakka)

6. Jouseen, jonka jousivakio $k = 2$ (N/m), on ripustettu 2 kg:n massa. Systeemi on nesteessä, jonka aiheuttama vastusvoima on lukuarvoltaan sama kuin nopeus (lausuttuna m/s). Systeemiin kohdistuu ulkoinen voima $r(t) = 3\cos 3t - 2\sin 3t$ (N). Määritä tasapainotilaratkaisu ("steady state") ja kirjoita se muotoon $R\cos(\omega t - \delta)$.

Piirrä heräte ja vaste samaan kuvaan, piirrä myös alkuehtoa $y(0) = 1, y'(0) = 0$ vastaava ratkaisu.

Jos käytät Maplea, niin käytä sitä derivointi- ja sievennysapukeinona, sovitaan kuitenkin, että voit käyttää `dsolvea` (HY)-osuuteen (transienttiin), kunhan varmistat, että osaat periaatteessa laskea sen käsin.

Ohjeita erityisesti Maple-tekniikkaan annetaan ws:llä `harj7ohje.mws`. "Heräte" tarkoittaa "syötettä", eli ulkoista "pakkovoimaa" eli EHY:n oikeaa puolta. "Vaste" tarkoittaa tulosta, outputtia, ratkaisua.

Maple-avustusta

```
randV:=n->RandomVector(n,generator=rand(-10000..10000)/10000.);
```

Funktio `RandomVector` on "uudessa kunnon" `LinearAlgebra`:ssa.