Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Ebeling

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 6 (viikko 42 , 22 – 25.10.2002)

Alkuviikko (AV)

1. Määritä reaaliset matriisit P ja C siten, että matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ voidaan esittää muodossa $A = PCP^{-1}$

2. Olkoon matriisilla A ominaisarvot 3 ja $\frac{1}{3}$ ja vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Selvitä, onko O dynaamisen systeemin $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ attraktori, repellori vai satulapiste.

   (b) Piirrä käsin kuva, jossa ovat suurimman ja pienimmän "vetovoiman/hylkimisvoiman" suunnat (osoita nuolilla prosessin etenemissuunta), ja muutama hassu muu trajektori suuntanuolineen.

3. Kuten huomaat, matriisia A ei edellisessä tarvittu, kun tiedettiin ominaisarvot ja -vektorit. Laske nyt kuitenkin tuo A.

4. Osoita, että vektorit $\mathbf{v}_1 = [2, 1, 3], \mathbf{v}_2 = [1, -2, 0], \mathbf{v}_3 = [6, 3, -5]$ muodostavat ortogonaalisen kannan $\mathbb{R}^3$:ssa.

   Määritä vektorin $\mathbf{u} = [9, -2, 4]$ esitys tässä kannassa. Huom! Muista käyttää ortogonaalisuutta.

5. Tarkastellaan avaruuden $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ aliavaruutta $H = \mathrm{sp}(\mathcal{T})$, jonka virittää funktiojoukko $\mathcal{T} = \{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$.

   Osoita, että $\mathcal{T}$ on H:n ortogonaalinen kanta, kun sisätulona on tavanomainen:

   $$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) f_2(x) dx$$

   Vihje: Käytä tyyppiä $\cos\alpha \sin\beta$ olevia kaavoja. Maplekin antaa niitä komennolla: `combine(cos(alpha)*cos(beta));` .

   Mieti myös parittomuus/parillisuuskäytöstä integroinnissa.

6. Muodosta matriisin

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

   sarakeavaruudelle ortogonaalinen kanta Gram-Schmidt-prosessilla (TE s. 26). (Siis ei tarvitse olla normeerattu.)

   Vast.
   $[3, 1, -1, 3]^T, [1, 3, 3, -1]^T, [-3, 1, 1, 3]^T$

Loppuviikko (LV)

1. Jatketaan AV-tehtävää trigonometrisesta OG-kannasta. Määritä funktioiden $f(t) = t$ ja $g(t) = t^2$ projektiot aliavaruudessa H. (Ts. parhaat approksimaatiot, eli pienimmän neliösumman ratkaisut.)

   Piirrä kuvaajat.

2. Mitä ominaisuuksista: "Hermiittinen, vinohermiittinen, unitaarinen" seuraavilla matriiseilla A,B,C on?

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 + 4\,i \\ 3 - 4\,i & 2 \end{bmatrix}$$

   $$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\,i\sqrt{3} \\ 1/2\,i\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix}$$

   $$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 + i & 0 \\ 1 - i & 0 & 1 + i \\ 0 & 1 - i & 0 \end{bmatrix}$$

   Määritä kunkin spektri (ominaisarvot) ja vertaa mainttua tyyppiä olevien matriisen peruslauseisiin. (Vaikkapa KRE Thm. 1 s. 386.)

3. Tutki matriisin $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ -0.3 & 1.4 \end{bmatrix}$ määräämän dynaamisen systeemin luonne (O:n kiintopistetyyppi) ja piirrä tyypillisiä trajektoreita. (Vrt. L9maple.)

4. Vastaavasti, kun $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ -4 & 1.5 \end{bmatrix}$

   Esitä matriisi muodossa, josta näkyy similaarisuus tyyppiä "venytys ja kierto" olevan matriisin kanssa.

5. Suorita täpläpöllöanalyysi loppuun. (Kts. L9maple.mws/html) Piirrä kuvaan avaruustrajektoreita. Kannattaa kirjoittaa proseduuri `traje3d`, jossa plot:n sijasta käytetään spacecurvea. (Tähän ehkä annetaan "virka-apuakin".)

6. Suorita samainen täpläpöllötutkielma visualisointeineen tapauksessa, jossa nuorisopöllöjen "juveniles" uuteen pesään hakeutumisen onnistumisprosentti on 50, jolloin matriisin alkio $a_{21} = 0.3$ aiemman 0.18 sijasta. (60% syntyvistä naaraspöllöistä selviytyy oman pesän nuorisojoukoksi.)