Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Ebeling

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 3 (viikko 40 , 1 – 4.10.2002)

Luentoaiheita: `L3.html, L4.html, L4maple.html,L5maple.html, [TE], Lay.`

Alkuviikko (AV)

1. Olkoon annettu vektoriavaruuden V kannat $\mathcal{D} = \{\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}\}$ ja $\mathcal{F} = \{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}\}$, ja saatakoon kantavektorit toisistaan näin:

$$\begin{cases} \mathbf{f_1} = \mathbf{2d_1} - \mathbf{d_2} + \mathbf{d_3} \\ \mathbf{f_2} = 3\mathbf{d_2} + \mathbf{d_3} \\ \mathbf{f_3} = -3\mathbf{d_1} + 2\mathbf{d_3}. \end{cases}$$

   (a) Määritä koordinaattimuunnosmatriisi, jonka avulla $\mathcal{D}-$koordinaatit saadaan lausutuksi $\mathcal{F}-$koordinaattien avulla.

   (b) Määritä $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$ vektorille $\mathbf{x} = \mathbf{f_1} - 2\mathbf{f_2} + 2\mathbf{f_3}$.

   Neuvo: Laske ilman mitään "teoriaa", kunhan vain sijoittelet ja keräät koordinaatit kunkin vektorin tekijäksi. Hyvä on tietysti verrata "teoriaan"myös.

2. Osoita, että kannanvaihtomatriisi S on kääntyvä. Jos tuntuu helpommalta, voit rajoittua avaruuteen V, jolle $\dim(V) = 2$.

3. Mikä kannanvaihtomatriisi on esimerkissä [TE] 1.17 s. 6 siirryttäessä luonnollisesta kannasta kantaan Q ? Mikä on polynomin $2x^2 - x + 3$ esitys kannassa Q ?

4. Olkoon $T : V \mapsto W$ lineaarikuvaus ja $H \subset V$ aliavaruus. Osoita, että kuvajoukkolle $T(H)$ (jonka tiedämme aliavaruudeksi) pätee: $\dim(T(H)) \leq \dim(H)$.

5. Olkoon $T : V \mapsto W$ lineaarinen injektio ("one-to-one") ja $H \subset V$ aliavaruus. Osoita, että $\dim(T(H)) = \dim(H)$. Jos T on lisäksi surjektio W:lle ("onto W"), niin siis $\dim(V) = \dim(W)$. Ts. isomorfisilla äärellisulotteisilla avaruuksilla on sama dimensio.

6. Olkoot f, g ja h `LRT` funktioita, jotka on määritelty $\mathbb{R}$:ssä. Muodostetaan näistä jatkuva-aikasignaaleista diskretoituja signaaleja laskemalla arvot kokonaislukupisteissä: $u_k = f(k), v_k = g(k), w_k = h(k)$. Ovatko diskreetit signaalit $(u_k), (v_k), (w_k)$ välttämättä `LRT`?

Loppuviikko (LV)

1. Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\}$.
   Suorita Maple-komennot:

```
> cos(2*t): %=expand(%);
...
> cos(6*t): %=expand(%);
```

   Olkoon $H = \mathrm{sp}(\mathcal{B})$. Osoita, että $\mathcal{B}$ on H:n kanta. (Tämä on miltei pelkkä toteamus, sehän palautuu monomien `LRT`- ominaisuuteen.) Varsinainen tehtävä:

   Kirjoita $\mathcal{C}$:n vektorien $\mathcal{B}$-koordinaattivektorit (käyttäen hyväksi edellä viitatun Maple-istunnon tuloksia) ja osoita niiden avulla, että $\mathcal{C}$ on `LRT` ja siis H:n kanta.

2. Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\} = \{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\} = \{\mathbf{y_0}, \ldots, \mathbf{y_6}\}$, kuten edellä.

   Edellä osoitettiin, että myös $\mathcal{C}$ on avaruuden $H = \mathrm{sp}\{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ kanta.

   (a) Muodosta $P = \left[[\mathbf{y_0}]_{\mathcal{B}} \quad | \quad \ldots \quad | \quad [\mathbf{y_6}]_{\mathcal{B}}\right]$, ja laske P^{-1}.

   (b) Selitä, miksi P^{-1}:n sarakkeet ovat vektorien $\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}$ $\mathcal{C}$-koordinaattivektoreita.
   Kirjoita sitten trigonometrisiä kaavoja, joilla $\cos t$:n potensseja voidaan lausua moninkertaisten kulmien kosinien avulla. Esimerkkinä sopivasta kaavasta olkoon: $5\cos^3 t - 6\cos^4 t + 5\cos^5 t - 12\cos^6 t$.

   Tällainen esitysmuoto on mm. integroinnin kannalta erityisen hyödyllinen, kuten varmasti tiedät.

3. Lineaarikuvauksen $T : U \mapsto V$ nulliteetti $\nu(T)$ ja rangi $r(T)$ määritellään [TE]:ssä s. 18.

   Olkoon $A = [T]_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V}$ T:n esitysmatriisi joidenkin kantojen $\mathcal{B}_U$ ja $\mathcal{B}_V$ suhteen. Osoita, että esitysmatriisin A nulliteetti $\nu(A)$ (olemme käyttäneet myös merkintää $n(A)$) ja rangi $r(A)$ yhtyvät vastaaviin T:n tunnuslukuihin.

4. Opiskelija ottaa lainaa 10000 € hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 €/kk.

   Olkoon y_k k:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö y_k:lle.

   Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet (k, y_k), ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

5. Määritä differenssiyhtälön (HY)

$$y_{k+2} - 7y_{k+1} + 12y_k = 0$$

   ratkaisuavaruuden kanta. (Käsinlasku)