Teknillinen korkeakoulu Apiola/Ebeling
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 2 (viikko 39 , 24 – 27.9.2001)

Luentoaiheita: `L2.html ....`

Alkuviikko (AV)

1. (a) Osoita, että funktiot $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$ ja $f_3(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3})$ ovat LRV $\mathcal{C}$:ssä. [1]

   (b) Osoita, että funktiot $\cos 3t, \sin 3t, t\cos 3t, t\sin 3t$ ovat LRT $\mathcal{C}$:ssä.

2. Olkoon V vektoriavaruus (VA) ja olkoot W_1 ja W_2 sen aliavaruuksia (AA). Mitkä seuraavista joukoista ovat V:n aliavaruuksia ja mikä ei. (a) $W_1 \cap W_2$, b) $W_1 \cup W_2$, (c) $W_1 + W_2 = \{u + v | u \in W_1, v \in W_2\}$

   Esitä todistus tai vastaesimerkki ja havainnollistus $\mathbb{R}^3$:ssa.

3. Olkoon annettu vektorijoukko $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ epätriviaalissa äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa V.

   Selvitä perustellen, mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia:

   (a) Kaikkien lineaarikombinaatioiden muodostama joukko on vektoriavaruus.

   (b) Jos $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{p-1}}\}$ virittää V:n, niin S virittää V:n.

   (c) Jos $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{p-1}}\}$ on `LRT`, niin S on `LRT`. .

   (d) Jos S on `LRT`, niin S on V:n kanta.

   (e) Jos $\mathrm{sp}(S) = V$ (eli jos S virittää V:n), niin jokin S:n osajoukko on V:n kanta.

   (f) Jos $\dim(V) = p$ ja $\mathrm{sp}(S) = V$, niin S ei voi olla `LRV`.

4. Neljä ensimmäistä ns. *Hermiten* polynomia ovat:
   $1, 2t, -2 + 4t^2$ ja $-12t + 8t^3$.

   Osoita, että ne muodostavat polynomiavaruuden $\mathcal{P}^3$ kannan.

[1] $\mathcal{C} = \{$jatkuvat funktiot $\mathbb{R}$:ssä$\}$

5. Olkoon $\mathcal{B}$ Hermiten polynomien muodostama $\mathcal{P}^3$:n kanta, ja olkoon $p(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$. Määritä p:n koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen, eli $[p]_B$

6. (a) Olkoon S n-ulotteisen vektoriavaruuden V osajoukko, jossa on vähemmän kuin n vektoria. Selvitä, miksi S ei voi virittää V:tä.

   (b) Olkoon H n-ulotteisen avaruuden V n-ulotteinen aliavaruus. Osoita, että $H = V$.

Loppuviikko (LV)

Nyt emme enää harjoittele rivioperaatioilla laskemista, vaan kaikissa on lupa käyttää `ref/rref`-aliasoituja funktioita.

1. Määritä kanta $\mathbb{R}^5$:n aliavaruudelle, jonka virittävät vektorit $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (0, 2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v_3} = (0, -1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v_4} = (1, 4, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v_5} = (0, 0, 2, 1, 3)$.

   ”Vapaaehtoinen”pohdintaosa: Jos Aatu saa tulokseksi jotkin vektorit ja Öhky saa jotkin toiset (saman määrän sentään toivottavasti), niin miten selvität, kumpi on oikeassa vai kenties kumpikin.

2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ja merkitään sarakevektoreita $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_5}$. Olkoon $B = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4}]$.

   (a) Selvitä, miksi $\mathbf{a_3}$ ja $\mathbf{a_5}$ kuuluvat B:n sarakeavaruuteen col(B).
   (b) Määritä nolla-avaruuden N(A) kanta.
   (c) Olkoon $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^4$ A:n määräämä lineaarikuvaus, ts. $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ (ts. $T = L_A$). Selvitä, miksi T ei ole injektio eikä surjektio.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

   (a) Määritä sarakeavaruuden kanta.
   (b) Määritä riviaruuden kanta.

(c) Määritä nolla-avaruuden (ytimen) dimensio.
(d) Tarkista dimensioita koskevan peruslauseen toteutuminen.

4. (a) Olkoon A $m \times n$-matriisi ja $Ab = [A\mathbf{b}]$ liitännäismatriisi. Lausu (välttämätön ja riittävä) ehto rangien $r(A)$ ja $r(Ab)$ avulla sille, että yhtälösysteemillä $Ax = b$ olisi ratkaisu(ja) (eli on konsistentti).

   (b) Osoita, että $m \times n$-matriisille A pätee $r(A) + n(A^T) = m$

5. (a) Osoita, että monomit $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ovat `LRT` $\mathbb{R}$:ssä. (b) Osoita, että ne ovat `LRT` myös jos määritelyjoukkona on mikä tahansa väli $[a, b]$.

   (Tietysti riittää tehdä pelkkä (b), niinhän.)

   Tapoja on monia: (a)-kohdassa vektoriyhtälö voidaan derivoida toistuvasti ja laskea 0:ssa. Tai voidaan käyttää LRV-lemmaa ja todeta raja-arvokäytöksen perusteella, että x^k ei voi yhtyä alemmanasteiseen polynomiin.

   (b)-kohta hoituu ainakin polynomien tekijöihinjaolla (ei haittaa, vaikka tulee kompleksilukuja mukaan). Eräs tapa olisi osoittaa, että ns. Vandermonden matriisi on aina kääntyvä (sarakkeet LRT). (Toisaalta tämä tulee sivutuotteena, jos käytämme jotain muuta tapaa.) Kyseessä on matriisi, joka saadaan, kun monomit $1, x, \ldots x^n$ lasketaan $n + 1$:ssä pisteessä $x_0, \ldots, x_n$ (Pisteet vaakasuuntaan, potenssit pystysuuntaan.) Maplen `LinearAlgebra`:ssa on `VandermondeMatrix` .

   (c) Piirrä monomien kuvaajia vaikkapa välillä $[-1, 1]$ ja yritä nähdä kuvasta lineaarinen riippumattomuus. Piirrä monomeja isoilla peräkkäisillä parillisilla (tai parittomilla) n:n arvoilla ja totea "melkein LRV". Tämä ilmenee numeerisessa laskennassa esim. interpolaatiopolynomin tapauksessa "häiriöalttiutena".

6. Matriisin N sarakkeet ovat koordinaatteja, jotka rajaavat ison N-kirjaimen.

   $$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

   Piirrä ensin tuo N.

   Sovella N:ään lineaarikuvausta, jonka matriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tämä on tyyppiä "leikkaus", "shear". Piirrä tulos.

   Skaalaa sen jälkeen x-koordinaatit kertomalla luvulla 0.75 ja piirrä taas.

   Vapaaehtoinen lisäys. Pyörittele N:ää "keskipisteen"ympäri siirtämällä keskipiste ensin O:oon ja kertomalla sopivalla kiertomatriisilla ja siirtämällä lopuksi takaisin.

   Ohje piirtoon: `> convert(Transpose(N),listlist); plot(%);`