Sarjaoppia

Käsitellään kompleksi- ja reaalisarjat yhdessä. Reaalilukujen ominaisuuksista (kuten järjestys) riippuvat asiat tulevat lisämausteena mukaan.

Kirjallisuutta:

1. [KRE] Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, 8. painos Part D Complex Analysis, s. 733 ...
2. Lahtinen-Pehkonen osa 2
3. Salenius
4. Adams, Grossman, Finney-Thomas, ...
5. [RA] Kivelä: Reaalimuuttujan analyysi

`../maple/ohjelmat.html#sarjat Maple-funktioita`

1 Historiaa

1. Euler
2. Leibniz (1646 - 1716)
3. Newton (1624 - 1727)
4. Cauchy (1789 - 1857)

Mitä tarkoittaa ääretän summa? $1-1+1-1+1-1+1-1\ldots$?

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)..=0+0+0+0+0...=0$

$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1).....=1+0+0+0+0...=1$

Niin Euler kuin Leibniz kävivät kuumana tämän kysymyksen suhteen. Euler ratkaisi sen näin: $1+x+x^2+...x^n+...=1/(1-x)$ (Geom. sarja, ehdolla $|x|<1$). Euler askaroi paljon hajaantuvien sarjojen kimpussa. Hän laski kaavan oikean puolen arvolla $x=-1$ ja päätyi siten asettamaan: $1-1+1-1+1-1+1-1....=1/2$ (Voidaan sanoa, että *Euler* liitti tähän nyky-ymmärryksemme mukaan hajaantuvaan sarjaan luvun $\frac{1}{2}$.) Leibniz omaksui saman kannan, tosin en tiedä nyt varmasti, millä perusteella. (Täytyy tarkistaa.) *Cauchy*:n suuri ansio oli siinä, että hän antoi suppenemiselle tarkan määritelmän (jota edelleenkin käytämme). Tämän jälkeen intohimot aiheen ympäriltä hälvenivät. Opittiin myös hyväksymään se, että uusia piirteitä tulee mukaan verrattuna äärellisillä summilla operointiin. Näistä hämmentävin lienee joidenkin ("ehdollisesti suppenevien") sarjojen summan riippuminen termien järjestyksestä.

Kerrataan vielä lukujonot

Määritelmä. Jono (z_n) suppenee kohti c:tä, jos: $\forall\epsilon>0\exists N$ s.e. $|z_n-c|<\epsilon$, kun $n>N$

Huom! Määritelmä on aivan sama $\mathbb{C}$:ssä ja $\mathbb{R}$:ssä. (Kuva vain on erilainen.)

Raja-arvolauseita

Lause1. Olk $z_n=x_n+iy_n, c=a+ib$.

$\lim z_n=c \iff \lim x_n=a$ ja $\lim y_n=b$

Lause2. Summan, tulon ja osamäärän (jos nimittäjän raja-arvo $\neq 0$) pätevät.

Luennolla kerrataan/esitellään funktion raja-arvo ja jatkuvuus, määritelmät eivät muodollisesti taaskaan eroa lainkaan kompleksi- ja reaalitapauksessa. Vastaavat algebralliset ominaisuudet (Lause 2) pätevät niin funktioden raja-arvoille kuin jatkuville funktioille.

Lause3. Jos f on jatkuva pisteesä z ja $z_n\to z$, niin $f(z_n)\to f(z)$.

Monotoniset ja rajoitetut jonot ([MR])

Nyt tulee keskeisen tärkeä lause, johon suurin osa yleisistä suppenemistuloksista perustuu.

Lause4.[MR] (vain $\mathbb{R}$) Jos x_n on kasvava ja ylhäältä rajoitettu reaalilukujono, niin on olemassa raja-arvo $\lim x_n$ ja se on $\sup x_n$.

Sama pätee yhtä hyvin pienenevään ja alhaalta rajoitettuun.

Todistuksen periaate:
Merk $s = \sup x_n$. Jos $\epsilon > 0$ niin jonkun s_n:n on oltava suurempi kuin $s - \epsilon$, muutenhan $s-\epsilon$ olisi pienintä ylärajaa pienempi yläraja. Koska jono on kasvava, jää koko loppuosa jonosta ympäristöön $[s-\epsilon, s]$ vangiksi (mikäänhän ei voi olla s:ää suurempi, kun s kerran on yläraja). Siinäpä se.

Lause 5 Suppeneva jono on rajoitettu.

Tod: Olkoon raja-arvo $= c$. Voidaan valita huoletta vaikka $\epsilon = 1$. On olemassa N siten, että kaikki jonon luvut z_n ovat 1-säteisessä, c-keskisessä kiekossa, kun $n > N$. Kaikki jonon pisteet sijaitsevat silloin O-keskisessä, R-säteisessä kiekossa, kun valitaan $R = \max(|c|+1, |z_1|, ..., |z_N|)$. Siispä jono on rajoitettu. (Jos haluat pitää mielikuvanasi reaaliakselia, niin litistä kiekko yksiulotteiseksi väliksi.)

Lause 6 [Kuristuslause, squeezing lemma]

*** Kirjoita ***

1. Vakiotermiset sarjat

Annettu jono $(z_1, z_2, ...) = (z_k)$. Muodostetaan osasummien jono

$$\begin{cases} s_1 = z_1 \\ s_2 = z_1 + z_2 \\ \dots \\ s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n \\ \dots \end{cases}$$

Sarjaa sanotaan *suppenevaksi*, jos osasummien jono (s_k) suppenee. Myönteisessä tapauksessa tätä osasummien jonon raja-arvoa sanotaan *sarjan summaksi*.

Sarjan summaan johtavat askeleet

1. Määrättävä s_n (differenssiyhtälö, usein vaikea tai mahdoton, vrt. integrointi "suljetussa muodossa")
2. Ratkaistava, suppeneeko s_n
3. Määrättävä $s = \lim s_n$

Sarjaoppi kesittyy aika suurelta osin kysymykseen 2, yrittämättäkään aina vastata kysymyksiin 1 tai 3. Toisaaalta 1&3-linjalta saadaan 2-kohtaa olennaisesti edistävää faktaa pelkästään jo geometrisen sarjan avulla, joka toimii erinomaisena vertailusarjana. Muut kuin geometrista sarjaa (tai "teleskooppisarjaa") koskevat 3.-tulokset ovat enimmäkseen syvällisiä, esim. Fourier-sarjojen suppenemislauseista seuraavia ihmeitä tai esim. Riemannin zeta-funktioon liittyviä vuosisatojensa suurien nerojen keksintöjä (Euler, Riemann, ...). Toki on näiden äärimmäisyyksien välillä olevia keinoja, kuten tunnetusta sarjasta derivoimalla saatava summakaava silloin, kun operaatio on luvallinen ym.

1.0 Geometrinen sarja, teleskooppisarja

Kyseessä on tavallisimmat sarjat, joiden osasummille voidaan muodostaa ekspilisiittinen kaava.

Geometrinen sarja Sen osaat johtaa ...

Teleskooppisarja

Kyseessä on sarja, jonka osasummalaskennassa tapahtuu onnellinen "sisätermien kumoutuminen".

Teleskooppisarja syntyy usein osamurtohajoitelmalla: (Maplessa `convert(lauseke,parfrac,muuttuja);`)

Esim:

```
1/((2*n-1)*(2*n+1));
 convert(%,parfrac,n);
```

Vain 1. ja viimeinen jäävät, "sisätermit"kumoutuvat pareittain. Summaksi saadaan 1/2 .

1.1 Yleisiä perusominaisuuksia

Jäännössarja, äärellisen osan poisjättäminen. Sarjan suppenemiseen ei vaikuta äärellinen määrä alkupään termejä. Sarjan summaan tietysti kylläkin. Merk. jäännössarjaa $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$. Jos sarja suppenee ja sen summa = s, niin $R_n = s - s_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

Lause [Välttämätön ehto] Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee, niin $z_n \to 0$.

Tod: $z_n = s_n - s_{n-1} \to 0 - 0 = 0$.

Lause[Lineaarisuus] Ol:$\sum z_n = Z, \sum w_n = W$. Tällöin $\sum cz_n = c \sum z_n$ ja $\sum (z_n + w_n) = \sum z_n + \sum w_n$

Lause[Re/Im] Olk $z_n = x_n + iy_n$.
$\sum z_n$ suppenee $\iff$ $\sum x_n$ suppenee ja $\sum y_n$ suppenee.

1.2. Positiivitermiset sarjat

Tässä puhutaan reaalilukusarjoista. Toisaalta valtaosa kompleksisarjateoriasta palautuu tähän, koska tärkeintä on lopulta *itseinen suppeneminen* . Puhutaan tässä *positiivisuudesta* tarkoittaen *ei-negatiivisuutta*

Lause[PosPer] Positiiviterminen sarja $\sum x_n$ suppenee, $\iff$ $\{s_n | n = 1, 2, ...\}$ on ylhäältä rajoitettu.

Tod: Positiivisuudesta seuraa, että osasummat muodostavat kasvavan jonon. Siispä väite palautuu monotonisia lukujonoja koskevaan (huipputärkeään) lauseeseen ([MR]).

Lause[IT] Integraalitesti. Olk. $x_n = f(n)$, missä f on jatkuva, pienenevä, posit. fkt. Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ja $\int_1^{\infty} f(x)$ suppenevat samanaikaisesti.

Tietysi riittää, että 1:n sijasta jostain N:stä alkaen.

p-harmoniset sarjat

Tiedämme, että harmoninen sarja hajaantuu. Selvitämme samantien integraalitestin avulla tapaukset

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Lause[p-sarjat] $\sum \frac{1}{n^p}$ suppenee $\iff$ $p < 1$.

Jatkoa yleisiin positiivitermisiin

Lause[Vertailutesti] Ol: $x_n \geq 0$.
Jos sarjalla $\sum x_n$ on suppeneva majorantti $\sum y_n$, missä $y_n \geq x_n \forall n$, niin $\sum x_n$ suppenee.
Jos sarjalla $\sum x_n$ on hajaantuva minorantti $\sum y_n$, missä $y_n \leq x_n \forall n$, niin $\sum x_n$ hajaantuu.

Tod: Jos suuremmat osasummat ovat ylhäältä rajoitettuja, niin toki ovat nyös pienemmät. Lause palautuu siis suoraan [PosPer]-lauseeseen yllä. Toinen osa seuraa ensimmäisestä "kontrapositiolla": Jos alapuolella oleva hajaantuu, niin yläpuolella oleva ei voi supeta, koska siinä tapauksessa juuri osoitetun mukaan alapuolella oleva suppenisi, vastoin oletusta.

Huom! Muistathan tässä ja muualla: Sarjan suppenemisen kannalta äärellinen määrä alkupään termejä on merkityksetön. Siksi yllä olevan kaltaiset ehdot tulee ajatella mielessään näin: "kaikilla n jostain indeksistä alkaen".

1.3. Itseisesti suppenevat sarjat

Lause. Itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Tod: Standarditodistus perustuu ns. *Cauchyn ehtoon*, jota käyttäen tulos seuraa suoraan kolmioepäyhtälöstä. Emme ole tätä ehtoa esitelleet, vaan olemme valiinneet [MR]-lauseen edustamaan Reaalilukujoukon täydellisyyttä. (Tätä lausahdusta ei tarvitse ymmärtää, selitetään hiukan luennolla.)

Todistus voidaan rakentaa [MR]-lauseen pohjalle näin:

Vaihe 1. Reaalisarjat: $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n| \implies 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$.

Siis oletuksen ja vertailuperiaatteen nojalla $\sum (x_n + |x_n|)$ suppenee, joten tämän ja $\sum |x_n|$:n erotuksena $\sum x_n$ suppenee.

Vaihe 2. Jos $\sum(|z_n|)$ suppenee, niin $\sum |x_n|$ ja $\sum |y_n|$, suppenevat, missä $z_n = x_n + iy_n$. Siis johtopäätös, $\sum z_n$ suppenee, seuraa lauseesta [Re/Im].

Lause[Suhdetesti] $\sum z_n$, missä $z_n \neq 0$.

Jos on olemassa q ja N, $0 < q < 1$ s.e. $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \leq q$, kun $n \geq N$, niin sarja suppenee.

Jos on olemassa N s.e. $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \geq 1$, kun $n \geq N$, niin sarja hajaantuu.
Jos $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \geq 1$, kun $n > N$, ei voida päätellä (eli "testi pettää") (Nämä eivät ole ainoat mahdollisuudet, mutta muista ei kyllä ole mitään iloa, jos kohta ei 3:stakaan)

Tod: Jos 1. pätee, niin N:stä alkavalla jäännössarjalla on geometrinen majorantti, suhde $q < 1$. Siis suppenee.

2:sta seuraa heti, että sarjan termi ei edes lähene 0:aa joten varmasti hajaantuu.

3:ssa käy kaksi esimerkkiä: 1. Harmoninen: $z_n = 1/n$. Toteuttaa ehdon 3, mutta sarja hajaantuu. 2. Yliharmoninen, vaikkapa $z_n = 1/n^2$. Toteuttaa myös ehdon 3, mutta sarja suppenee.

Huom! Itseisarvosarjan hajaantumisesta ei yleisesti seuraa itse sarjan hajaantuminen. Mutta tässä, samoin kuin seuraavassa hajaantuminen päätellään siitä, että sarjan termit eivät lähene 0:aa. Muistammehan vaikka unissamme, että sarjan yleisen termin on lähestyttävä nollaa, jotta sarjan suppeneminen olisi mahdollista. Sehän on aina ja kaikkialla välttämätön ehto sarjan suppenemiselle.

Lause[Suhdetestin raja-arvomuoto] Oletetaan, että on olemassa $L = lim_{n\to\infty}|\frac{z_{n+1}}{z_n}|$

Jos $L < 1$, niin $\sum |z_n|$ suppenee,
Jos $L > 1$, niin $\sum |z_n|$ hajaantuu
Jos $L = 1$, niin testi pettää.

Tod: Palautuu edelliseen: Jos $L < 1$, niin $q = L + b < 1$, missä $b = (1 - L)/2$ (vaikkapa) . Eräästä N:stä alkaen on $|\frac{z_{n+1}}{/} z_n| < L + b$ (raja-arvon määritelmän mukaan).

No siinähän on edellisen lauseen ehto 1 ja homma toimii.

Kohdass 2 taas jokin $L - b > 1$ ja saadaan epäyhtälö toisinpäin jostain N:stä alkaen. Niinpä edellisen lauseen kohta 2 puree.

Jos raja-arvo=1, kelpaavat samat esimerkit kuin äskenkin.

Lause[Juuritesti] Aivan samat johtopäätökset saadaan tarkastelemalla suhteen sijasta jonoa $\sqrt[n]{|z_n|^{1/n}}$

Lause[Juuritestin raja-arvomuoto] Oletetaan, että on olemassa $L = lim|z_n|^{1/n}$

Jos $L < 1$, niin $\sum |z_n|$ suppenee.
Jos $L > 1$, niin $\sum |z_n|$ hajaantuu.
Jos $L = 1$, niin testi pettää. Palaamme tähän potenssisarjojen yhteydessä, "suppenemissäteen"määräämisen suhteen juuritestimuoto on parempi (antaa yleispätevän tuloksen) kuin suhdemuoto. Silti käytännössä suhdetestiä sovellettaneen useammin.

Geometriseen majoranttiin perustuva virhearvio

Jos $|z_k| < Kq^k$, kun $k > N$, missä $0 < q < 1$, niin geometrisen sarjan summan kaava antaa arvion:

```
                                 (N + 1)
                               K q
|s - s_N |        <          ----------
                                1 - q
```

(Kaavaa ei kannata muistella, sehän tulee suoraan geom. sarjan kaavasta.)

Ehdollisesti suppenevat sarjat, vuorottelevat sarjat

Jos sarja ei suppene itseisesti, mutta kuitenkin suppenee, sanotaan: sarja suppenee *ehdollisesti.*

Onko sellaisia? No ainakin vuorottelevat sarjat, kuten tämä:

```
infinity
 -----       (n + 1)
  \      (-1)
   )     -----------
  /           n
 -----
 n = 1
```

Yllä oleva vuorotteleva harmoninen sarja suppenee seuraavan nojalla: Vuorotteleva sarja tarkoittaa sarjaa

```
infinity
 -----
  \           (n + 1)
   )      (-1)         x[n]
  /
 -----
 n = 1
```

Tässä kukin $x_n \geq 0$.

Leibnizin lause Vuorotteleva sarja suppenee, jos

- $x_n \geq 0$ (no sehän oli oletuksena)
- $x_{n+1} \leq x_n$
- $\lim x_n = 0$ (välttämätön ehto)

Tällöin Virheelle pätee: $|s - s_N| < |x_{n+1}|$. Virhe on pienempi kuin 1. poisjätetty termi ja samanmerkkinen.

1.0.1 Sarjojen termien järjestämisestä

Lause Jos sarja sum(z[n],n=1..infinity) suppenee itsesesti, niin sen suppeneminen ja summa eivät riipu järjestyksestä. Tod:

1. Ol posit. terminen. Tällöin pelataan osasummien jonon sup:lla, joka on järjestyksestä riippumaton.
2. Jos kyseessä on reaalinen, niin tarkastellaan erikseen positiivisten ja negatiivisten termien summia ja sovelletaan niihin kohdan 1 tulosta. Sarjojen lineaarisuuslause antaa johtopäätöksen.
3. Kompleksisarja taas jaetaan Re- ja Im-osiin.

1.0.2 Potenssisarjat

Nyt kyseessä ovat funktiosarjat, voidaan ajatella ääretönasteisina polynomeina.