Laskuharjoitus 1.

Loppuviikon mallivastaukset

1.

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos[y_1]+i\sin[y_1])e^{x_2}(\cos[y_2]+i\sin[y_2]) \\
&= e^{x_1}e^{x_2}(\cos[y_1]\cos[y_2]+i\cos[y_1]\sin[y_2]+i\sin[y_1]\cos[y_2]-\sin[y_1]\sin[y_2]) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos[y_1+y_2]+i\sin[y_1+y_2]) \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

(Reaaliosiisn sovellettiin kosinin ja imaginaariosiin sinin yhteenlaskukaavaa (takaperin).)

2.

$$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\Theta}$$
$$w = e^{i\alpha}z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x+iy)$$

$$= (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y + i((\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y)$$

Kirjoitetaan tämä kompleksiluku (pysty)vektoriksi (kompleksilukuhan on $\mathbb{R}^2$:n vektori).

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\,x & -\sin(\alpha)\,y \\ \sin(\alpha)\,x & \cos(\alpha)\,y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Niinpä kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen antaa saman tuloksen kuin tässä näkyviin saadulla kiertomatriisilla kertominen (kun tulkitaan kompleksiluku (pysty)vektorina).

4.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$$

Jos lukujonolla on raja-arvo, niin tavallisten raja-arvosääntöjen (niihin kuuluu jatkuvalla funktiolla (tässä neliöjuurella) operointi) perusteella pätee:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2a_n} = \sqrt{1+2\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{1+2a}$$

$$a^2 = 1+2a \Leftrightarrow a^2-2a-1=0 \Rightarrow a = 1\pm\sqrt{2}$$

. Ainoastaan plus-merkki on mahdollinen, koska jonon alkiot ovat positiivisia.

Jotta yllä oleva lasku olisi pätevä, on osoitettava, että lukujoolla todellakin on raja-arvo. Käytössämme on [MR]-lause.

1) Osoitetaan, että jono on **ylhäältä rajoitettu**, eli $a_n \le M \forall n$. Tiedämme edellä lasketun perusteella, että supremum on $1+\sqrt{2}$, mutta helpompaa on ottaa hieman väljempi raja, riittää, että joku M saadaan. Yritetään arvolla $M = 3$.

Induktio:

n=1:

$$a_1 = 1 < 3$$

ok.

Ol: pätee arvolla $n = k$.

Olkoon n=k+1:

$$a_{k+1} = \sqrt{1+2a_k} < \sqrt{1+2\times 3} < 3$$

Siispä induktiotodistus rajoittuneisuudelle on valmis.

Osoitetaan seuraavaksi, että jono on **kasvava**. Eli $a_{n+1} \ge a_n \forall n$.
n=1:

$$a_2 = \sqrt{1+2a_1} = \sqrt{3} > 1 = a_1$$

ok. Ol. n=k pätee. Osoitetaan arvolla $n = k+1$:

$$a_{k+2} = \sqrt{1+2a_{k+1}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+2a_k}} \ge \sqrt{1+2\sqrt{1+2a_{k-1}}} = \sqrt{1+2a_k} = a_{k+1}$$

MR-lauseen perusteella monotoninen ylhäältä rajoitettu jono suppenee, joten kaikki on valmista ja siten todellakin raja-arvo on $1+\sqrt{2}$.

5. a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2^n}{3^n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3^{n+2}} + \frac{2^n}{3^{n+2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{7}{18}$$

5. b)
Osamurtokehitelmällä saadaan lausekkeelle muoto

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3n-2)} - \frac{1}{(3n+1)}\right].$$

Lasketaan n:n termejä, jotta nähdään miltä sarja näyttää.

$$s_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \ldots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right]$$

Teleskooppisarja suppenee kivasti muotoon

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{3n+1}\right] = \frac{1}{21} - \frac{1}{9n+3}.$$

Joten sarjan raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{21}$$

6.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{2^n n}$$

Tehdään sarjalle virhearvio ylöspäin.

$$|R_n| = |S - S_n| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{n+i}{2^n n}\right|$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n2^n} < \sqrt{2}\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n}$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2^{-m-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\cdot 2^{-m-1} = \sqrt{2}\cdot 2^{-m} \leq 5\times 10^{-6}$$

Tästä laskemalla saadaan $m > 18$.