Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 8 (viikko 12 , 20 — 22.3.2002)

Nämä harjoitukset kuuluvat kokonaisuudessaan 2. välikokeen alueeseen.

Alkuviikko (AV)

1. Määritä ja luokittele kriittiset pisteet (gradientin 0-kohdat) funktiolle

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$$

Selvitä myös globaalien ääriarvojen tilanne koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Kannattaa lisäksi piirtää, jos pääset Maplen ääreen.

Voit käyttää laskutyön vähentämiseksi Maple-istunnon tuloksia:

```
> restart: with(linalg):
> f:=x^2*y*exp(-x^2-y^2):
> grad(f,[x,y]):map(l->collect(l,exp(-x^2-y^2)),%);
```

$$\left[\left(2\,xy - 2\,x^3 y\right) e^{-x^2-y^2}, \left(x^2 - 2\,x^2 y^2\right) e^{-x^2-y^2}\right]$$

```
> H:=hessian(f,[x,y]);map(l->collect(l,exp(-x^2-y^2)),%):
```

$$\begin{bmatrix} \left(2\,y - 10\,x^2 y + 4\,x^4 y\right) e^{-x^2-y^2} & \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} \\ \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} & \left(-6\,x^2 y + 4\,x^2 y^3\right) e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

Huom: Muista käyttää aina tarpeen mukaan **alkuperäistä ääriarvon määritelmää**. Sillä selvität aivan helposti semidefiniitit tapaukset.

2. Suorita 3 askelta SD-menetelmällä funktion $f(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2)$, kun alkupisteenä on$\mathbf{x_0} = [1 - 2]^T$.

3. Sovella SD-menetelmää funktioon $f(\mathbf{x} = x_1^2 + cx_2^2$. Aloita pisteestä $[c1]^T$. Osoita että tällöin
$\mathbf{x_m} = a_m[c, (-1)^m]^T$, missä $a_m = \frac{(c-1)^m}{(c+1)^m}$
Päättele, että suurella c:n arvolla suppeneminen käy hitaaksi. (Panethan merkille, että suuri c merkitsee suurta eksentrisyyttä korkeuskäyräellipsille.)

4. Tarkastellaan luentoesimerkkiä (KRE Exa 1, kuva 442 s. 995). Onko mahdollista löytää sellainen lineaarinen kohdefunktio $f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$, jolla olisi maksimi käyvän alueen (feasible region) eli sinisen nelikulmion sisäpisteessä.

   Perustele (ainakin kaksi hyvää perustelumahdollisuutta).

5. Ruokalajit A ja B sisältävät 700 ja 500 kaloria ja sisältävät 10 g ja 35 g proteiinia ja maksavat 1.50 ja 2.00 euroa massayksikköä kohti vastaavasti. Määritä minimihintainen ruokavalio, joka sisältää vähintään 3100 kaloria ja vähintään 100 g proteiinia.

6. Määritä pisteen $(3, 0)$ lyhin etäisyys paraabelista $y = x^2$

   (a) palauttamalla yhden muuttujan rajoittamattomaan (”unconstrained”) tehtävään,
   (b) soveltamalla Lagrangen kertojamenettlyä.

Loppuviikko (LV)

1. Osoita, että funktiolla $f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ on paikallinen maksimi pisteessä $(1, 1, 1)$.

2. (a) Osoita ominaisarvojen (merkkien) avulla, että yhtälö $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$ esittää ellipsiä.

   (b) Määritä ellipsin puoliakselit määräämällä lyhin ja pisin etäisyys O:sta käyrälle. Käytä Lagrangen kertojamenettlyä.

   (c) Tarkista laskemalla ominaisvektorit, että sait oikean tuloksen.

3. Lanka, jonka pituus on L leikataan (sisältää myös yhden pätkän mahdollisuuden, jolloin oikeasti ei leikata) korkeintaan kolmeen pätkään ja jokainen pätkä taivutetaan neliöksi. Määritä neliöiden alojen summan maksimi ja minimi.

4. Laske Maplella AV-tehtävä 2. Piirrä reitti ja korkeuskäyriä. (harj8ohje.mws)

5. Sovella SD-menetelmää funktion $f(x, y) = e^x(4x^2 + 2y^2 + 4xy + 2y + 1)$ jonkin minimin (tai maksimin) etsimiseksi. Lähde liikkeelle korkeuskäyräpiirroksesta saamastasi alkuarvosta.

Ohjeita

Kriittiset pisteiden luokittelu

Tämä on enemmänkin kertausta:

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä seuraavasti:

Lause Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 kertaa jatkuvasti derivoituva KRP:ssä p. Olkoon $H = H_f(p)$ Hessen matriisi pisteessä p, ja olkoot $\lambda_1, \dots \lambda_n$ H:n ominaisarvot.

(a) Jos $\lambda_i > 0, i = 1 \dots n$, niin KRP p on minimi.
(b) Jos $\lambda_i < 0, i = 1 \dots n$, niin KRP p on maksimi.
(c) Jos jokin $\lambda_i > 0$ ja jokin $\lambda_j < 0$, niin KRP p on satulapiste (siis ei ääriarvo).
(d) Jos kaikki ominaisarvot ovat samanmerkkiset ja jokin on $= 0$, niin "testi pettää". (Tällöin on tavallisesti turvauduttava suoraan min/max määritelmään.)

Tee vielä itsellesi selväksi, että kaikki on luettavissa suoraan pääakseliesityksestä $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.