Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 7 (viikko 11 , 13 — 15.3.2002)

Alkuviikko (AV)

1. Muodosta funktion $f(x, y) = \cos(x + \sin y)$ toisen asteen Taylorin polynomi kehitettynä $(0, 0)$:ssa. Miten hyvän approksimaaton saat arvolle $f(0.1, -0.2)$? (Vertaa laskimen antamaan arvoon, ei tarvitse miettiä jäännöstermiarviota.)
2. Määritä funktion $f(x, y) = \frac{1}{2+x-2y}$ astetta 2 oleva Taylorin polynomi kehitettynä pisteessä $(2, 1)$
3. Lausu neliömuodon $q(x) = x^T Ax$ definiittisyydet symmetrisen matriisin A ominaisarvojen (merkkien) avulla. (Määritelmä paperin lopussa.)

   Vihje: Lausu neliömuoto pääakselikoordinaattien y_i avulla, sitten voit lukea kuin avointa kirjaa.
4. Osoita 2×2 symmetrisen matriisin A tapauksessa, että matriisi on
   - definiitti (pos. tai neg.), jos ja vain jos $\det(A) > 0$,
   - indefiniitti, jos ja vain jos $\det(A) < 0$,
   - semidefiniitti, jos ja vain jos $det(A) = 0$

   Vihje: Kirjoita $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ja muodosta karakteristinen polynomi. Käytä hyväksesi toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. (Jos et muista, niin kerro auki $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.)
5. Määritä funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari)

Loppuviikko (LV)

1. Määritä funktion $f(x, y) = \frac{1}{2+x-2y}$ asteita 2,3 ja 4 olevat Taylorin polynomit kehitettynä pisteessä $(2, 1)$ (Sama kuin AV, mutta nyt Maplella)

   Kts. myös harj7ohje.mws
2. Muodosta funktion $f(x, y) = \cos(x + \sin y)$ Taylorin polynomeja kehitettynä $(0, 0)$:ssa, vaikkapa asteeseen 8 saakka.

   Piirrä funktio $f(x, y)$ ja eriasteisia Taylorin polynomeja, samoin voit piirtää tehtävän 1 kohdalla. Olkoon piirtäminen tässä kuitenkin "vapaaehtoista".

   Huom! Tehtävät 1 ja 2 on tarkoitus tehdä käyttäen Maplea ennenkaikkea "derivointilaskimena".

   Lopuksi kannattaa kokeilla myös valmiin mtaylor-funktion käyttöä.
3. Määritä funktion (sama kuin AV-tehtävässä) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. Havainnollista piirroksin.

   Ohje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`
4. Sama kuin edellä funktiolle $f(x, y) = \cos x + \cos y$
5. (Sopii puhtaasti käsinlaskuun, toki saa käyttää Maplea laskuapualaisena.)

   Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)
6. Ylimääräinen "projektitehtävä", saa tehdä 2:n hengen ryhmässä. Maksimisuoritus: 3 tavallista rastia, menevät normaalin pistekiintiön yli.

   Määritä funktion $f(x, y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$ suurin ja pienin arvo joukossa $[1, 2] \times [1, 2]$

   Annetaan aikaa harjoitukseen LV 8 saakka (pe 22.3.)

Ohjeita

Neliömuotojen definiittisyys

Määr: Neliömuoto $q(x) = x^T Ax$ (A on symmetrinen matriisi) on

1. positiivisesti definiitti, jos $q(x) > 0\ \forall x \neq 0$,
2. negatiivisesti definiitti, jos $q(x) < 0\ \forall x \neq 0$,
3. positiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
4. negatiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
5. indefiniitti, jos $\exists x, y$ siten, että $q(x) > 0$ ja $q(y) < 0$.
   Samoja definiittisyyskäsitteitä käytetään myös symmetrisestä matriisista A.

Taylorin polynomit

Kahden muuttujan Taylorin polynomi kehitettynä pisteesä p voidaan kirjoittaa:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(p)$$

Tästä on helppo arvata, miten useamman muuttujan polynomi rakentuu.

Erityisesti 2. asteen Taylorin kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(p+h) = f(p) + h^T \nabla f(p) + \frac{1}{2} h^T H_f(p) h + R_2(h),$$

joka pätee n:n muuttujan funktiolle sellaisenaan. Tässä jäännöstermi $R_2(h) = ||h||^3 O(h)$. (Eli riittävän pienessä p:n ystössä pätee: $R_2(h) \leq M||h||^3$ jollain vakiolla M.)

Kriittiset pisteet, ääriarvot

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä.