Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

**Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002**
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

**Laskuharjoitus 3** (viikko 6 , 6 – 8.2.2002)

**Sopimus:** Kun pyydetään *suppenemiskiekkoa*, riittää ilmoittaa avoin kiekko. Kun pyydetään *suppenemisaluetta*, riittää ilmoittaa avoin kiekko ja erikseen sen reunan reaalipisteet $z_0 - \rho$ ja $z_0 + \rho$ ( suppenemissäde: $\rho$).

## Alkuviikko (AV)

1. Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäde ja -kiekko. Millä $z$:n arvoilla sarja suppenee 1) itseisesti , 2) ehdollisesti, 3) hajaantuu? (Reunalla riittää siis tutkia $z \in \mathbb{R}$.)
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+4)^n}{n3^n}$,
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(z-2i)^n$.

2. Määritä sarjan
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2z-3)^n$
   suppenemissäde ja -kiekko

3. Määritä sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ summa muodostamalla potenssisarjan $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ summa.
   Vihje: Lähde liikkeelle $\frac{1}{(1-z)^2}$:n sarjasta (senhän osaat muodostaa monellakin tavalla). Kerro puolittain $z$:lla ja derivoi, nyt oletkin jo lähellä. Kun olet perillä, sijoita sopiva arvo $z$:lle.

4. Määritä sarjojen $1+z+z^2+z^3+\ldots$ ja $1-z+z^2-z^3+\ldots$ Cauchyn tulosarja ja sen esittämä (rationaali)funktio. Mikä on sarjan suppenemiskiekko?

5. (a) Esitä $\frac{1}{z}$ $(z-1)$:n potenssien mukaisena sarjakehitelmänä.
   (b) Esitä $\frac{1}{z^2}$ $(z+2)$:n potenssien mukaisena sarjakehitelmänä.
   (c) Esitä $\frac{1}{z-2}$ $\frac{1}{z}$:n potenssien mukaisena sarjakehitelmänä.
   Mitkä ovat suppenemisalueet. ( (c)-kohdassa alue ei ole kiekko, vaan ...)
   Tietoisku: (c)-kohdan tehtävässä tulet samalla määränneeksi funktion $\frac{1}{z-2}$ $\mathcal{Z}$-käänteismuunnoksen.

6. Määritä seuraavien funktioiden Maclaurinin [1] sarjat ja niiden suppenemisalueet:
   a) $\cosh x$, b) $\cosh x - \cos x$, c) $\cos\sqrt{5x}$,

## Loppuviikko (LV)

1. Pienillä $x$:n arvoilla pätee $\sin x \simeq x$. Arvioi virhettä Taylorin lauseen avulla. Millä origokeskisellä välillä pätee ($|virhe| \le 10^{-7}$)?
   Minkäasteinen polynomi tarvitaan, jotta sama virhearvio pätisi välillä $[-1, 1]$.
   Piirrä myös kuvat.

2. Muodosta seuraavien funktioiden Maclaurinin sarjat ja totea niiden pätevyysalueet.
   (a) $\cos(2x^3)$ (b) $\sin x \cos x$
   Tarkistukseen ja rutiinisievennyksiin voit käyttää Maplea, mutta nämä ovat varsinaisesti käsinlaskuja.

3. Laske Maclaurinin sarjakehitelmät funktioille
   (a) $\ln\frac{1-x}{1+x}$ (b) $\arcsin x$
   Samat loppukaneetit kuin edellä. Maplea voit käyttää myös suoraan derivointiin perustuvan ja "hienovaraisemman"ratkaisutavan vertailuun.

4. Tarkastellaan funktiota (normeerausta vaille normaalijakauman kertymäfunktiota)
   $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$
   Laske sopivaa Taylorin polynomia ja jäännöstermiä käyttäen likiarvo luvulle $erf\ (1)$ siten, että $|virhe| \le 0.005$.
   Maple tuntee funktion erf. Laske Maplella (tai edistyneellä laskimella) todellinen virhe tällä termien määrällä ja vertaa jäännöstermiarviolla saamaasi ylärajaan.

5. Potenssisarjan
   $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

[1] Maclaurin=Taylor origossa

kertoimet toteuttavat rekursion

$$c_1 = 1, \qquad c_{k+1} = \left(k - k^2 \ln \frac{k+1}{k}\right) c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Määritä sarjan suppenemissäde ja piirrä summafunktion kuvaaja reaalialueella summeeraamalla sarjan termejä. Piirrä osasummien kuvaajia myös jonkin matkaa suppenemisalueen ulkopuolelle.

Voit Piirtää myös kompleksitasossa $|f(z)|$ z:n funktiona, argumentin mukaan väritettynä. (plot3d tai complexplot3d, kts. harj3ohje.mws)

6. Kombinatoriikassa käytetään termiä *generoiva funktio*, jolla tarkoitetaan annettuun jonoon liittyvää potenssisarjafunktiota. (Siis funktiota, jonka sarjaesityksen kertoimina ovat annetut luvut.)

   Määritä *Fibonaccin* lukujonon $(a_n)$ generoiva funktio $f(z)$, missä siis $a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1$.

   Vihje: Jotta tehtävä ei olisi liian vaikea, annetaan tulos $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$. Tehtävänä on osoittaa, että näin on. Lähde liikkeelle yhtälöstä $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)(1 - z - z^2) = 1$ ja käytä Cauchyn tuloa (konvoluutiota). Osoita induktiolla, että $b_n$-kertoimet ovat Fibonacci-lukuja $a_n$.

   Generoivan funktion avulla saat eksplisiittisen ratkaisukaavan Fibonacceille tähän tapaan:
   Muodosta osamurtohajoitelma ja kirjoita molemmat osat geometrisiksi sarjoiksi.
   Yhdistämällä vastinpotenssien kertoimet näetkin tuloksen, mahtavaa!

   Voit käyttää Maplea apuna vaikka seuraavaan tapaan:

```
> f:=1/(1-z-z^2);series(f,z=0,10);
# Tämä antaa uskonvahvistusta.
# Näin voit muodostaa Fibonacceja:
> a[0]:=1: a[1]:=1: for j from 2 to 20 do a[j]:=a[j-1]+a[j-2] od:
> seq(a[j],j=0..20);
#
> convert(%,parfrac,z);
# Osamurtohajoitelma ei synny suoraan, koska nimittäjän nollakohtina
esiintyy juurilausekkeita.
> solve(denom(f)=0,z);  # Tästä saat juuren, jolla kokonaislukukujoukko
pitää laajentaa, osamurtoa varten. Paljastetaan se täten.
> F:=convert(f,parfrac,z,sqrt(5));
```

   Edellä mainitut geometriset sarjat kannattaa tehdä käsin. (Maplea tms. on mahdotonta saada sieventämään täsmälleen siihen muotoon, johon ajatteleva ihminen haluaa.) Yleensäkin kannattaa opetella Maple/käsinlaskudialogia.

   Mainio tehtävä, vaikka sen itse sanonkin!

Tehtävissä 5 ja 6 voi perusteellisesti ja ansiokkaasti tehtynä olla ainesta pieneen lisäansioon.

## Lauseita ja kaavoja

**Taylorin lause** Olkoon $f \in C^{(n+1}[a,b]$ ja $x_0 \in [a,b]$. Jokaista $x \in [a,b]$ kohti on olemassa $\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$ (tai $(x, x_0)$ siten että

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0}{k!}$$

ja $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$