Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka Apiola

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 2 (viikko 5 , 30.1 – 1.2.2002)

Alkuviikko (AV)

1. Laske sarjan
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\dots$$
summa.

2. Osoita, että harmonisen sarjan osasumma $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ on asymptoottista tyyppiä $\Theta(\log_2 n)$ [1]

   Alaspäin arvio suoritettiin luennolla (kts. myös [LP] s. 10), ylöspäin arviossa pitää modidifioida todistusta vastaavasti.

3. Seuraavassa on väitteitä, joista **osa voi olla tosia** ja **osa ehkä epätosia**. Ratkaise, mitkä (mahd.) ovat tosia ja mitkä (mahd.) epätosia.

   Todista väite edellisissä (mahd.) tapauksissa ja anna vastaesimerkki (mahd.) jälkimmäisissä.

   (a) Jos $z_n = 0 \;\; \forall n$, niin $\sum z_n$ suppenee.
   (b) Jos $\sum z_n$ suppenee, niin $\sum \frac{1}{z_n}$ hajaantuu,
   (c) Jos $\sum z_n$ ja $\sum w_n$ hajaantuvat, niin $\sum (z_n + w_n)$ hajaantuu.
   (d) Jos $a_n > 0$ ja $\sum a_n$ suppenee, niin $\sum a_n^2$ suppenee.

4. a) Osoita vertailuperiaatteen avulla vertaamalla harmoniseen sarjaan (siis käyttämättä integraalitestiä), että aliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (n^p)^{-1}, \;\; 0 < p < 1$ hajaantuu.

   b) Osoita (kahdella) esimerkillä, että positiivitermisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n \geq 0$ juuritestin perusteella ei voi tehdä johtopäätöstä, jos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

[1] Jono $x_n = \Theta(y_n)$, jos on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ ja vakiot L ja M siten, että $x_n \leq M y_n$ ja $y_n \leq L x_n \; \forall n \geq n_0$.

5. Osoita integraalitestin avulla, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ suppenee ja sen summa $s < \frac{\pi}{2}$.

   Vihje: Integrointi kannattaa ehkä aloittaa 0:sta.

6. Suppenevatko seuraavat sarjat vai hajaantuvat?

   (a) $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

Loppuviikko (LV)

1. Suppenevatko seuraavat sarjat vai hajaantuvat?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$

2. Millä z:n arvoilla sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$$
suppenee a) itseisesti, b) ehdollisesti ja c) hajaantuu?

   Älä vetoa mihinkään potenssisarjalauseisiin, ole kuin niitä ei olisi keksittykään. Erään kompleksitason ympyräviivan saat muuten jättää selvittämättä, mutta sen leikkauspisteet reaaliakselin kanssa kuuluvat selvitettäviin.

3. Määrittele edellisen tehtävän sarjakehitelmään liittyen Maple-funktio

```
osasumma:=(x,n)->sum(x^k/sqrt(k+1),k=1..n);
```

   Tällä funktiolla voit approksimoida sarjakehitelmän määrittelemää funktiota sen suppenemiskiekossa, erityisesti suppenemisvälillä $(-R, R)$.

   Laske osasumma-funktion arvoja (riittävän suurilla n:n arvoilla) joissakin suppenemiskiekon pisteissä kompleksitasossa.

   Piirrä funktion kuvaaja rajoittumalla reaaliakseliin ja ottamalla hiukan suppenemisväliä pienempi väli ja sopivan suuri n osasummaan. Lähellä suppenemisalueen reunaa tarvitset epäilemättä isompaa n:n arvoa. Kokeile ja asettele!

4. Selvitä seuraavien sarjojen käytös itseisen ja ehdollisen suppenemisen suhteen.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(n+1)\ln(n+1)}$

Vihje: (b)-kohdassa kannattaa itseisen tutkimisessa soveltaa intagraalitestiä. Voit halutessasi käyttää Maplea integrointiapulaisena, mutta toisaalta tuo on syytä osata integroida käsinkin.

5. Kehitä $\frac{1}{1+x^2}$ sarjaksi geometrisen sarjan kaavaa takaperin soveltamalla. Mikä on suppenemissäde? Integroi saamasi yhtälö puolittain $0 \dots 1$. Kuinka monta termiä saamastasi sarjasta täytyy ottaa, jotta saisit π:n likiarvon 5:llä numerolla, entä 10:llä?

6. Tarkastellaan vuorottelevaa harmonista sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, joka siis suppenee (sano kuitenkin miksi). Osoita, että sarja voidaan järjestää niin, että summaksi saadaan 2002.

   Vihje: Tarkastele erikseen positiivisia ja negatiivisia termejä. Molempien muodostamat sarjat hajaantuvat (miksi?). Haluttu järjestys saadaan aikaan tähän tapaan:

   Otetaan ensin positiivisia niin paljon, että juuri päästään yli 2002:n (miksi voidaan?). Sitten negatiivisia niin monta, että juuri alitetaan 2002. Sitten taas positiivisia, jne.

   Näin jatkaen tulevat kaikki sarjan termit läpikäydyksi (perustele), eli haluttu järjestys saadaan, ja sarjan summa on 2002 (perustele niinikään).

   Täydennä todistus tämän ajatuksen pohjalta (ei tarvitse olla kaikin osin formaalisti täydellinen, kunhan oikeat ideat ovat kohdallaan.)