

## Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

Tentti 07.01.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

1. Tutki, suppenevatko seuraavat sarjat:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n+1)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

Perustele huolellisesti päätelmäsi.

2. Laske avaruusintegraali

$$\iiint_V \frac{dV}{1+x^2+y^2+z^2},$$

kun  $V = \{(x, y, z) \mid x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ , missä  $R > 0$ .

3. Laske tasointegraali

$$\iint_R \frac{e^{x-y}}{x+y} dA,$$

missä  $R$  on suorakaide, jota rajoittavat suorat  $y = x$ ,  $y = x + 5$ ,  $y = 2 - x$  ja  $y = 4 - x$ . (Vihje: Tee muuttujanvaihto  $u = x - y$ ,  $v = x + y$ .)

4. a) Olkoot  $\varphi(x, y, z)$  ja  $\psi(x, y, z)$  kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia skalaarifunktioita ja lisäksi  $\psi \neq 0$  kaikkialla. Sievennä  $\mathbf{F} = \psi^2 \nabla \left( \frac{\varphi}{\psi} \right)$  ja laske  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ .

b) Olkoot edellä lisäksi  $\varphi$  ja  $\psi$  harmonisia, ts. molemmat toteuttavat yhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Olkoon  $\mathcal{S}$  "riittävän säännöllinen" umpinainen pinta. Laske vektorikentän  $\mathbf{F}$  vuo (*flux*) pinnan  $\mathcal{S}$  läpi.

5. Laske Stokesin lauseen avulla viivaintegraali

$$\oint_C y^3 dx - x^3 dy,$$

kun  $C$  on ympyrä  $z = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ja kiertosuunta on "ylhäältä katsoen vastapäivään".

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö  $2y'' + 5y' + 2y = 6e^{-2x}$ .