Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Välikoe 2, maanantai 13.12.2004 klo 9–12.

Alla $(X, \mathbb{M}, \mu)$ on täydellinen mitta-avaruus ei-negatiivisella mitalla μ, $\mathbb{M}_{\text{Leb}}$ on $\mathbb{R}$:n Lebesgue-mitallisten joukkojen σ-algebra ja m Lebesguen mitta.

Perustele selkeästi kaikki vastauksesi!

1. Olkoon $\lambda : \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ kompleksinen mitta s.e. $\lambda \ll \mu$. Osoita, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.
$$\mu(E) < \delta \Rightarrow |\lambda(E)| < \varepsilon,$$
kun $E \in \mathbb{M}$. Päteekö väite, jos $\lambda : \mathbb{M} \to [0, \infty]$ on mitta s.e. $\lambda \ll \mu$?

2. Tee molemmat kohdat. Oletetaan $\mu(X) < \infty$.
   (a) Olkoon
   $$S = \left\{ s : X \to \mathbb{R} \ : \ s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, a_j \in \mathbb{R}, E_j \in \mathbb{M} \right\}.$$
   Osoita, että $S \subset L^\infty(X, \mu)$ on tiheä osajoukko.
   (b) Olkoon $A : L^1(X, \mu) \to \mathbb{R}$ lineaarinen kuvaus, jolle
   $$|A(f)| \leq \|f\|_1,$$
   kaikille $f \in L^1(X, \mu)$. Osoita dualiteettilauseisiin vetoamatta, että on olemassa yksikäsitteinen funktio $h \in L^\infty(X, \mu)$, jolle
   $$A(f) = \int_X hf \; d\mu.$$

3. Olkoon $1 \leq p < \infty$, $h \in \mathbb{R}$, $T_h : L^p(\mathbb{R}, m) \to L^p(\mathbb{R}, m)$,
$$(T_h f)(x) = f(x + h).$$
Osoita, että kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}, m)$
$$\lim_{h \to 0} \|T_h f - f\|_p = 0.$$
Mikä on tilanne, kun $p = \infty$?

4. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava (eli $a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) < f(y)$) ja absoluuttisesti jatkuva. Osoita, että $\mu : \mathbb{M}_{\text{Leb}} \to [0, \infty]$
$$\mu(E) = m(f(E)),$$
missä $E \in \mathbb{M}_{\text{Leb}}$, määrittelee mitan, jolle $\mu \ll m$.