Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 9, 17.11.2004

Ratkaisuehdotuksia (WM)

1.

a) Koska esimerkiksi $m(\mathbb{Q})=0$ ja $\lambda(\mathbb{Q})=\infty$, ei ole $\lambda \ll m$. Toisaalta, jos $\lambda(A)=0 \Rightarrow A$:ssa ei ole yhtään alkiota $(A=\emptyset) \Rightarrow m(A)=0$. Koska $A \in \mathcal{M}$ oli mielivaltainen, $m \ll \lambda$. Koska $m \ll \lambda$, ei ole $m \perp \lambda$ (muuten $m=0$, Rudin 6.8 (g) s. 120).

b) Oletetaan, että $m = m_s + h\lambda$, koska $m_s \perp \lambda$ ja $m \ll \lambda$, $m_s \perp m$. Siis m_s on keskittynyt Lebesgue-mitan mielessä nollamittaisiin joukkoihin. Olkoon $E \in \mathcal{M}$, $m(E)=0$ mielivaltainen. Tällöin

$$0 = m(E) = m_s(E) + h\lambda(E) \neq 0,$$

mikä on ristiriita.

Toisaalta, jos $E \in \mathcal{M}$ s.e. $m_s(E)=0$ ja $\lambda(E)=n>0$, saadaan

$$0 = m(E) = h\lambda(E) \Rightarrow h=0.$$

Tällöin $m = m_s \Rightarrow m=0$, mikä on ristiriita.

$\therefore$ m:llä ei ole Lebesguen dekompositiota (hajotelmaa).

2.

Selvästi

$$\sup_{\|g\|_q\le 1}\int_X |fg|\,d\mu \le \sup_{\|g\|_q\le 1}\left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q}\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \sup_{\|g\|_q\le 1}\|g\|_q\|f\|_p \le \|f\|_p,$$

missä ensimmäiseen epäyhtälöön sovellettiin Hölderin epäyhtälöä. Tapaus "$\geq$" hoidetaan kolmessa osassa.

<u>1° $p=1$</u>

$$\sup_{\|g\|_q\le 1}\int_X |fg|\,d\mu \ge \int_X |f|\,d\mu,$$

missä $g\equiv 1 \in L^\infty(X)$.

<u>2° $1<p<\infty$</u>

Olkoon $f\ge 0$ ja $g=cf^{p-1}$, missä c on jokin positiivinen vakio. Tällä valinnalla

$$\int_X fg\,d\mu = c\int_X f^p d\mu = c\|f\|_p^p.$$

Valitaan vakio c s.e. $\|g\|_q=1$, missä

$q=\frac{p}{p-1}$ $\left(p^{-1}+q^{-1}=1 \Rightarrow q^{-1}=1-p^{-1}=\frac{p-1}{p}\right)$.

Nyt $\|f^{p-1}\|_q^q = \int_X (f^{p-1})^q \, d\mu = \int_X (f^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu$

$$= \int_X f^p \, d\mu = \|f\|_p^p \implies$$

valitaan $c := \|f^{p-1}\|_q^{-1} = \left(\|f^{p-1}\|_q^q\right)^{-1/q}$

$$= \left(\|f\|_p^p\right)^{-1/q} = \|f\|_p^{1-p}.$$

Siis $\displaystyle\int_X fg \, d\mu = c \int_X f^p \, d\mu = c\|f\|_p^p = \|f\|_p$

$$\implies \sup_{\|g\|_q \le 1} \int_X |fg| \, d\mu \ge \int_X fg \, d\mu = \|f\|_p .$$

Yleiseen tapaukseen valitaan g $|f| \ge 0$:lle kuten yllä. Tällöin

$$\int_X |fg| \, d\mu = \int_X |f| g \, d\mu = \|(|f|)\|_p = \|f\|_p .$$

<u>3° $p = \infty$</u>

Nyt tarvitaan σ-äärellisyyttä. Tiedetään, että $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, missä $\mu(X_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Oletetaan, yleisyyttä menettämättä, että $f \neq 0$.

Olkoon annettu mielivaltainen $\varepsilon > 0$ ja $E := \{x \in X : |f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$

Tällöin $\mu(E) > 0$ ja $\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap X_n)\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} (E \cap X_n)\right)$.

Näin ollen

$0<\mu(E_N)<\infty$ jollakin $E_N := \bigcup_{n=1}^{N} (E \cap X_n)$.

Jos valitaan $g := c\chi_{E_N}$, missä $c = \mu(E_N)^{-1}$, saadaan

$$\int_X |fg|\,d\mu = c\int_{E_N} |f|\,d\mu \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen,

$$\sup_{\|g\|_q \leq 1} \int_X |fg|\,d\mu \geq \int_X |fg|\,d\mu \geq \|f\|_\infty.$$

<u>Huomio</u>

- Siis jos $p<\infty$, mitan ei tarvitse olla σ-äärellinen.

- Jos μ ei ole σ-äärellinen ja $p=\infty$:

  Olk. $X = \{a, b\}$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$.

  Olkoon $g = \chi_{\{b\}}$, jolloin $L^1 = \{\alpha\chi_{\{a\}} : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

  Näin ollen

$$\int_X |fg|\,d\mu = 0 < \|g\|_\infty = 1 \quad \forall f \in L^1.$$

3. Kiinnitetään $r \in \mathbb{R}_+$. Tällöin $m(B(x,r))^{-1}$ on vakio; riittää todistaa, että kuvaus

$$g(x) := \int_{B(x,r)} f \, dm = \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_{B(x,r)} \, dm$$

on jatkuva. Olkoon $\{x_n\}$ jono s.e. $x_n \neq x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Näytetään, että

$$g(x_n) \longrightarrow g(x_0), \text{ kun } n \to \infty.$$

Olkoon $y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B(x_0, r)$, koska $m(\partial B(x_0,r)) = 0$.

(Huom! m = n-dimensioinen Lebesguen mitta, "mittaa" tilavuuksia, m_{n-1} = $n-1$-dimensioinen mitta "mittaa" aloja, $m_{n-1}(\partial B(x_0,r)) \neq 0$)

Olkoon annettu $\varepsilon > 0$.

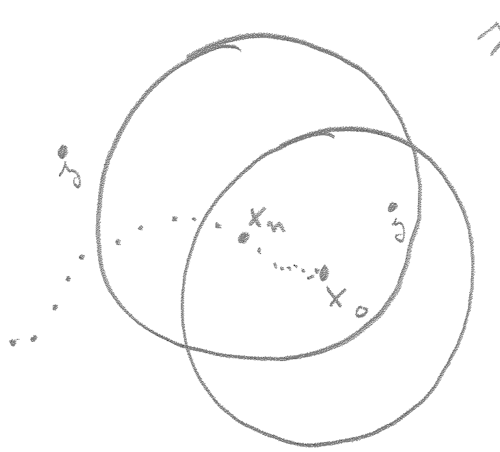
Jos $y \in B(x_0, r)$ ja $|x_n - x_0| < \delta := r - |y - x_0| > 0$,*)

$$|(f\chi_{B(x_n,r)})(y) - (f\chi_{B(x_0,r)})(y)| = 0 < \varepsilon.$$

(*) Tällöin siis $\chi_{B(x_n,r)}(y) = 1 = \chi_{B(x_0,r)}(y)$)

Jos $y \in \overline{B}(x_0,r)^c$ ja $|x_n - x_0| < \delta := |y - x_0| - r > 0$,

$$\chi_{B(x_n,r)}(y) = 0 = \chi_{B(x_0,r)}(y) \text{ ja}$$



$$|(f\chi_{B(x_n,r)})(y) - (f\chi_{B(x_0,r)})(y)| = 0 < \varepsilon,$$

Valitaan $\delta := ||y - x_0| - r| > 0$.

näin ollen

$$(f\chi_{B(x_n,r)})(y) \longrightarrow (f\chi_{B(x_0,r)})(y)$$

jokaisella $y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B(x_0,r)$. Koska $|f\chi_{B(x_n,r)}| \leq |f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall x_n \in \mathbb{R}^n, n=1,2,\ldots,$ voidaan käyttää Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{B(x_n,r)}\,dm &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\partial B(x_0,r)} f\chi_{B(x_n,r)}\,dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\partial B(x_0,r)} \lim_{n\to\infty} f\chi_{B(x_n,r)}\,dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\partial B(x_0,r)} f\chi_{B(x_0,r)}\,dm \\ &= \int_{B(x_0,r)} f\,dm.\end{aligned}$$

4.

a) olkoon $f \in C^\alpha$ ja $M := \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|}$.

Tällöin

$$|f(t)-f(0)| \leq |t-0|^\alpha M \leq M$$

kaikilla $t \in [0,1]$. Näin ollen

$$|f(t)| \leq |f(t)-f(0)| + |f(0)| \leq |f(0)| + M$$

$\Rightarrow$

$$\|f\|_\alpha = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + M \leq |f(0)| + 2M < \infty.$$

$\|\cdot\|_\alpha : C^\alpha \longrightarrow [0,\infty)$ todella on normi, sillä

(Rudin 5.1 s. 95)

(c) $\|f\|_\alpha = 0 \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = 0 \Rightarrow f = 0$.

(b) $\|cf\|_\alpha = |c| \|f\|_\alpha$ selvästi $\forall c \in \mathbb{C}$.

(a)
$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\alpha &= \sup_{t \in [0,1]} |f(t)+g(t)| + \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \frac{|f(t)+g(t)-f(s)-g(s)|}{|t-s|} \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} (|f(t)| + |g(t)|) + \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \left(\frac{|f(t)-f(s)| + |g(t)-g(s)|}{|t-s|} \right) \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|} + \sup_{t \in [0,1]} |g(t)| + \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \frac{|g(t)-g(s)|}{|t-s|} \\
&= \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha,
\end{aligned}$$

jokaisella $f, g \in C^\alpha$.

b) Koska $C^\alpha \subset \mathbb{C}^{[0,1]} := \{ f : f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \}$, joka tunnetusti on vektoriavaruus, riittää näyttää, että $f, g \in C^\alpha, c \in \mathbb{C} \Rightarrow cf, f+g \in C^\alpha$.

Tämä seuraa kuitenkin a-kohdasta. Siispä C^α on vektoriavaruus (tämä olisi oikeastaan pitänyt näyttää jo a-kohdassa, koska normi on määritelty vain vektoriavaruudessa). Kohdasta a yllä seuraa, että C^α on normiavaruus. Näytetään, että se on myös täydellinen.

Olkoon $\{f_n\} \subset C^\alpha$ Cauchy-jono. Tällöin se on myös Cauchy-jono avaruudessa $C([0,1];\mathbb{C}) :=$ $\{f : f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, f \text{ jatkuva}\}$. Joukko $C_b([0,1];\mathbb{C})$ sisältää rajoitetut ja jatkuvat kuvaukset $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$. $C_b([0,1])$ on Banach-avaruus normilla $\|\cdot\| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Nyt suljettu väli $[0,1]$ on kompakti, joten jokainen jatkuva kuvaus on rajoitettu (f jatkuva $\Rightarrow$ A kompakti $f(A)$ kompakti). Näin ollen $C_b([0,1];\mathbb{C}) = C([0,1];\mathbb{C})$.
Tästä seuraa, että valittu Cauchy-jono suppenee tasaisesti johonkin $f \in C([0,1];\mathbb{C})$. Näytetään, että $\|f - f_n\|_\alpha \longrightarrow 0$, kun $n \longrightarrow \infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin löytyy $N \in \mathbb{N}$ s.e.
$\|f_m - f_n\|_\alpha < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n, m \geq N$. Olkoon
annettu $t, s \in [0,1]$, $t \neq s$. Tällöin

$$\frac{|f(t) - f_n(t) + f_n(s) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{|f_m(t) - f_n(t) + f_n(s) - f_m(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{jokaisella } n \geq N.$$

Näin ollen

$$\|f - f_n\|_\alpha = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - f_n(t)| + \sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ t\neq s}} \frac{|f(t) - f_n(t) + f_n(s) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon \quad \text{jokaisella } n \geq N.$$

Siis $f_n \to f$ C^α:ssa, kun $n \to \infty$. Sandaan

$$\begin{aligned}|f(t) - f(s)| &\leq |f(t) - f_n(t) + f_n(s) - f(s)| + |f_n(t) - f_n(s)| \\ &\leq \|f - f_n\|_\alpha |t-s|^\alpha + |f_n(t) - f_n(s)| \\ &\leq (\|f - f_n\|_\alpha + M)|t-s|^\alpha \leq M|t-s|^\alpha \quad \forall\, n \geq N.\end{aligned}$$

$$\sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ t\neq s}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq M < \infty \implies f \in C^\alpha.$$

Koska Cauchy-jono $\{f_n\}$ oli mielivaltainen,
C^α on täydellinen.

__Huomio:__ kun $\alpha > 1$, jokainen $f \in C^\alpha$ on vakiofunktio:

$$h \in (0,1], \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|} = \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} \cdot \frac{|h|^\alpha}{|h|} \leq \|f\|_\alpha \frac{|h|^\alpha}{|h|} \to 0, \text{ kun } h \to 0$$

$$\implies f'(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0,1].$$

5. Esimerkiksi kelpaa muunnelma ns. topologisesta sin-käyrästä. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Kun $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Kun $x = 0$,

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|f(\varepsilon) - f(0)|}{|\varepsilon|} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^2 \left|\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|}{|\varepsilon|}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} |\varepsilon| \left|\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} |\varepsilon|$$

$$= 0.$$

$$\therefore \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

joka ei selvästikään ole jatkuva, koska $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$:llä ei ole raja-arvoa, kun $x \to 0$.
(Olk. $x_n = (n\pi)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $x_n \to 0$, kun $n \to \infty$, mutta $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(n\pi) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ hajaantuu.)

Tai:

Tarkastellaan suljettuja välejä $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}]$, $n = 1, 2, \dots$ ja funktiota $f : [0, 3/2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}]}(y)\, dy .$$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(\tfrac{3}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{3/2} \chi_{[1/n, 1/n + 1/2^n]}(y)\, dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m([\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{2^n}]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 .$$

Selvästi jokaisella $x \in [0, 3/2]$

$$f'_{\pm}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x \pm h} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}]}(y)\, dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1/n, 1/n + 1/2^n]}(x)$$

$\therefore \ \exists\, f'(x) \quad \forall x \in [0, 3/2]$.

Mutta $f'(x)$ ei ole jatkuva.