Mat-1.150 Reaalianalyysi
Harjoitus 8, 10.11.2004
Ratkaisuehdotuksia (WiM)

1. Huomaa, että positiivinen mitta on äärellinen jos se on kompleksinen mitta.

a) Olkoon $\nu \ll \mu \ll \lambda$. Tällöin löytyy yksikäsitteinen $f \in L^1(\lambda)$ s.e.

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda$$

jokaisella $E \in \mathcal{M}$ Radon-Nikodym lauseen nojalla. Edelleen $d\mu = f \, d\lambda \Rightarrow \frac{d\mu}{d\lambda} := f$.
Olkoon $g := \frac{d\nu}{d\mu}$ ja $h := \frac{d\nu}{d\lambda}$ vastaavasti (näin voidaan tehdä, koska $\ll$ on transitiivinen, t.s. $\nu \ll \lambda$: $\lambda(E)=0 \Rightarrow \mu(E)=0 \Rightarrow \nu(E)=0$.)

Saadaan

$$\int_E h \, d\lambda = \nu(E) = \int_E g \, d\mu = \int_E g f \, d\lambda$$

jokaisella $E \in \mathcal{M}$. Näin ollen $\int_E (h - gf) d\lambda = 0$ jokaisella $E \in \mathcal{M} \Rightarrow h - gf = 0$ λ-m.k. $\Rightarrow$ $h = gf$ λ-m.k. $\left(\Leftrightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\right)$.

b) $A := \{x \in X : \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\}$, $\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_A 0 \, d\mu = 0$.

2.

Lauseen 6.12, Rudin s. 124, nojalla löytyy funktio ω s.e. $|\omega(x)| = 1 \ \forall x \in X$ ja $\mu = \omega |\mu|$. Oletuksen nojalla $\mu = f\lambda$. Näin ollen $\omega|\mu| = f\lambda$. Koska jokaiselle $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = \int_A \omega \, d|\mu| = \int_A f \, d\lambda$. Saadaan kaikille $g \in L^1(\mu)$,

$$\int_A g \, d\mu = \int_A g\omega \, d|\mu| = \int_A g f \, d\lambda .$$

erityisesti, kun $g = \overline{\omega}$,

$$(1) \qquad |\mu| = \overline{\omega} f \lambda .$$

Jos jossain positiivimittaisessa joukossa (mitan λ suhteen) ei olisi voimassa $|\mu| \geq 0$ ja $\lambda \geq 0$ päädyttäisiin ristiriitaan yhtälön (1) kanssa. Siispä, koska $|\mu| \geq 0$ ja $\lambda \geq 0$, on $\overline{\omega} f \geq 0$ λ-m.k. Näin ollen, koska $|\overline{\omega}| = |\omega| = 1$ on oltava $\overline{\omega} f = |f|$ λ-m.k. $x \in X$.

3. Huom! Tehtävänannossa tulisi olla $\mathbb{P}(\Omega)=1$ (ei siis $\mathbb{P}(X)=1$).

Merkitään $c(n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$, siis $c(n)$ on vakio, joka riippuu vain dimensiosta n.

Radon-Nikodym lauseen nojalla voidaan sanoa, että h_n on mitan P_0 Radon-Nikodym derivaatta mitan P_a suhteen. Lauseen 1.29 Rudin s. 23 nojalla

$$\mathbb{E}_{P_0}(f)=\int_\Omega f\,dP_0=c(n)\int_\Omega f e^{-|x|^2/2}dx$$

ja

$$\mathbb{E}_{P_a}(h_n f)=\int_\Omega h_n f\,dP_a=c(n)\int_\Omega h_n f e^{-|x-a|^2/2}dx.$$

Ehdosta $\mathbb{E}_{P_0}(f)=\mathbb{E}_{P_a}(h_n f)$ saadaan

$$\left(h_n e^{-|x-a|^2/2}-e^{-|x|^2/2}\right)f=0 \quad \text{m.k. } x\in\mathbb{R}^n$$

(Lebesgue mitan suhteen)

Oletetaan, että $f\neq 0$ m.k. x, saadaan

$$h_n(x)=e^{(|x-a|^2-|x|^2)/2} \quad \text{m.k. } x\in\mathbb{R}^n.$$

Kun $a = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $|a|^2 = n$ ja

$$h_n(a) = e^{-|a|^2/2} = e^{-n^2/2},$$ ~~mistä~~

~~saadaan~~

$$h_n(a) \longrightarrow 0,$$

kun $n \longrightarrow \infty$.

Funktio h_n on P_0:n Radon–Nikodym derivaatta mitan P_a suhteen, $h_n := \frac{dP_0}{dP_a}$.

4.

Selvästi: 1) $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0$,

koska μ_j mitta jokaisella $j = 1, 2, 3, \ldots$

Olkoon $\{A_i\}$ numeroituva kokoelma erillisiä ($A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$) mitallisia joukkoja. Tällöin, koska $\mu_j \geq 0 \ \forall j = 1, 2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
2)\ \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_j(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),
\end{aligned}
$$

mistä seuraa, että μ on numeroituvasti additiivinen.

$\therefore$ 1) + 2) $\Rightarrow$ μ on mitta.

5. Todistetaan aluksi, että $(X, \|\cdot\|)$ on normiavaruus. $(X, \|\cdot\|)$ on ensinnäkin vektoriavaruus, koska $c\mu, \mu+\nu \in X$, kun $\mu, \nu \in X$ ja $c \in \mathbb{C}$. (Rudin 6.5 s. 119). Myös muut vektoriavaruuden aksioomat (Rudin 2.1 s. 33) toteutuvat selvästi, esimerkiksi $0 \in X$ olkoon mitta $0 : A \longrightarrow 0$ $\forall A \in \mathfrak{M}$. $(X, \|\cdot\|)$ on normiavaruus, jos se toteuttaa normiavaruudelta vaaditut aksioomat (Rudin 5.2 s. 95). Todistetaan nämä:

1° $\|\mu\|_X = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{M}$
$\Rightarrow \mu = 0$, koska muuten
$|\mu|(X) \geq |\mu|(A) \geq |\mu(A)| > 0$.

2° $$\|c\mu\|_X = |c\mu|(X) = \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |c\mu(E_i)|$$
$$= \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |c||\mu(E_i)|$$
$$= |c| \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| = |c|\|\mu\|_X$$
jokaisella $c \in \mathbb{C}$,

3° $$\|\mu+\nu\|_X = |\mu+\nu|(X) = \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |(\mu+\nu)(E_i)|$$
$$\leq \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (|\mu(E_i)| + |\nu(E_i)|)$$

$$\|\mu+\nu\|_X \le \ldots \le \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\mu(E_i)| + |\nu(E_i)| \right)$$

$$= \sup_{\{E_i\}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)| \right)$$

$$\le \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| + \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)|$$

$$= |\mu|(X) + |\nu|(X) = \|\mu\|_X + \|\nu\|_X$$

jokaisella $\mu, \nu \in X$.

Ollaan siis näytetty, että $(X, \|\cdot\|)$ on normiavaruus. Näytetään, että se on täydellinen.

Olkoon $\{\mu_j\}$ numeroituva jono mittoja s.e. $\{\mu_j\} \subset X$ ja olkoon $\mu_0 = 0$. Oletetaan vielä, että jono on Cauchy-jono. Siirtymällä osajonoon saadaan

$$\|\mu_{i+1} - \mu_i\|_X \le \frac{1}{2^i}, \quad i \ge 1,\ i \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}.$$

Olkoon

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} |\mu_{i+1} - \mu_i| : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$$

Näin määritelty η on mitta, kuten tehtävässä 4 osoitettiin.

η on nyt siis positiivinen mitta. Lisäksi

$$\eta(X) \le |\mu_1|(X) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty .$$

Nyt $|\mu_i|(A) \overset{(*)}{\le} \eta(A)$ ja $\mu_i \ll |\mu_i| \ll \eta$.

Radon-Nikodymin lauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen $h_i \in L^1(\eta)$ s.e.

$$\mu_i = h_i \eta \quad (\text{tai } d\mu_i = h_i d\eta).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \|h_{i+1} - h_i\|_1 &= \int_X |h_{i+1} - h_i| \, d\eta \\ &= \|\mu_{i+1} - \mu_i\|_X \\ &\le \frac{1}{2^i}, \end{aligned}$$

missä käytettiin tehtävän 2 tulosta. Siispä

$$h = \lim_{i\to\infty} h_i \in L^1(\eta).$$

Määritellään $\mu = h\eta$ (tai $d\mu = h\,d\eta$), jolloin

$$\|\mu_i - \mu\|_X = \|h - h_i\|_1 \longrightarrow 0,$$

kun $i \to \infty$.

[$(*)$ $|\mu_i| = \left|\sum_{j=0}^{i-1} (\mu_{j+1} - \mu_j)\right| \le \sum_{j=0}^{i-1} |\mu_{j+1} - \mu_j| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\mu_{j+1} - \mu_j| = \eta$]