Huomautus tehtävään 4.

Yleisen mitan μ tapauksessa on mahdollista:

$$A \subset E,\ \mu(E) = 0,\ \text{mutta } A \notin \mathcal{M}.$$

Esimerkki:

Olkoon $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}, \mu)$ mitta-avaruus ($\mathbb{B}$ = Borel-σ-algebra) ja $\mu = m_n|\mathbb{B}$ (Lebesguen mitta rajoitettuna Borel-σ-algebraan). Tällöin $\exists B \in \mathbb{B}$, $\mu(B) = 0$, ja $A \subset B$ s.e. $A \notin \mathbb{B}$.

Todistetaan tämä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ei-Lebesgue-mitallinen (olemassaolo todistettu luennolla) ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s.e. $f(x) = (x, 0, \dots, 0)$. Tällöin f on jatkuva ja

$$m_n^*(fA) \le m_n^*(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \ \forall i = 2, \dots, n\})$$
$$= 0 \Rightarrow fA \text{ on Lebesgue-mitallinen.}$$

Mutta $fA \notin \mathbb{B}$, koska jos $fA \in \mathbb{B}$, alkukuva $f^{-1}(fA) = A \in \mathbb{B}$, koska f jatkuva $\Rightarrow$ RR, koska A ei ole edes Lebesgue-mitallinen.

Olkoon $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, Borel-funktioita ja oletetaan, että $f_j \to f$ μ-m.k., ts.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \not\to f(x)\} \subset B \in \mathbb{B},\ \mu(B) = 0.$$

Tästä ei voida päätellä, että f on Borel-funktio.

Sen sijaan f on Lebesgue-mitallinen funktio.

~~Syy:~~ m_n on täydellinen.

Esimerkki.

Olkoon $A \subset B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) = 0$ ja $f = \chi_A$ sekä $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.e. $f_j(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $f_j(x) \to f(x)$, kun $j \to \infty$, kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus B \Rightarrow f_j \to f$ μ-m.k. Selvästi f_j:t ovat Borel-funktioita, mutta f ei ole, sillä $f^{-1}((0,\infty)) = A \notin \mathcal{B}$.

Tämä ei aiheuta ongelmia. Jos mitta μ ei ole täydellinen, siitä voidaan aina tehdä täydellinen.