Mat-1.150 Reaalianalyysi

Lassas/Marola

Harjoitus 6, 27.10.2004

1. Olkoon $f : X \to \mathbb{C}$ mitallinen ja $\mu \geq 0$ mitta X:ssä. Määritellään

$$\phi(p) = \int_X |f|^p \, d\mu, \quad 0 < p < \infty.$$

   Olkoo joukko $E = \{p \; : \; \phi(p) < \infty\}$ ja f nollasta poikkeava joukossa, jolla on positiivinen mitta.

   (a) Näytä, että jos $r, s \in E$, $r < s$, niin jokaiselle $p \in (r, s)$ on voimassa $p \in E$.

   (b) Oletetaan, että $\|f\|_r < \infty$ jollakin $r < \infty$. Todista, että $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$, kun $p \to \infty$.

2. Olkoon oletukset kuten tehtävässä 1 ja lisäksi $\mu(X) < \infty$.

   (a) Todista, että $\|f\|_r \leq M(r, s)\|f\|_s$, $0 < r < s \leq \infty$, jollakin vakiolla $M(r, s) < \infty$, joka ei riipu funktiosta f.

   (b) Todista, että $L^s(\mu) \subset L^r(\mu)$, $0 < r < s \leq \infty$.

   (c) Voiko olla, että $L^s(\mu) = L^r(\mu)$, $0 < r < s \leq \infty$?

3. Näytä, että

   (a) $L^p(\mathbb{R}^n)$ on separoituva.

   (b) $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ei ole separoituva.

4. Näytä, että translaatio on jatkuva $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä, kun $1 \leq p < \infty$. Mikä on tilanne $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:ssä?

5. Olkoon $\lambda^\star$ $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ Lebesguen ulkomitta, $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\lambda^\star}$ Lebesgue-mitalliset joukot ja $\mathbb{B} = [0, 1]$:n tavallisen topologian Borel-joukot. Tarkastele avaruuksia $L^p([0, 1], \mathbb{B}, \lambda)$ ja $L^p([0, 1], \mathbb{M}, \lambda)$, kun $1 \leq p \leq \infty$.

   (a) Onko $C([0, 1])$ tiheä osajoukko näissä avaruuksissa? Ovatko yksinkertaiset funktiot tiheässä?

   (b) Onko identiteettikuvaus $I : L^p([0, 1], \mathbb{B}, \lambda) \to L^p([0, 1], \mathbb{M}, \lambda)$ isomorfismi?

   (c) Mikä on $\mathbb{B}$–mitallisten ja $\mathbb{M}_{\lambda^\star}$–mitallisten joukkojen suhde?