Mat-1.150 Reaalianalyysi
Harjoitus 3, 6.10.2004
Ratkaisuehdotuksia (WM)

1. Valitaan yksinkertainen funktio s s.e.

$$0 \le s \le |f| \text{ ja } \int_X |f|\,d\mu - \int_X s\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $\alpha := \max_{x\in X} s(x) < \infty$.

1° jos $\alpha = 0$, niin

$$\int_X |f|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja voidaan valita $\delta = 1$.

2° $\alpha \neq 0$. Valitaan $\delta := \frac{\varepsilon}{2\alpha}$.
Jos nyt $\mu(E) < \delta$, niin

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\,d\mu &= \int_E (|f|-s)\,d\mu + \int_E s\,d\mu \\
&\le \int_X (|f|-s)\,d\mu + \int_E s\,d\mu \\
&= \int_X |f|\,d\mu - \int_X s\,d\mu + \int_E s\,d\mu \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \alpha\mu(E) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

2.

Lukumäärämitta (counting measure) määritellään seuraavasti

$$\mu(A) = \begin{cases} A\text{:n alkioiden lkm.}, & \text{jos } A \text{ äärellinen} \\ \infty, & \text{jos } A \text{ ääretön} \end{cases}.$$

Olkoon μ lukumäärämitta ja määritellään kuvaukset

$$f_n : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(j) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \quad \text{ja}$$

$$g : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(j) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| .$$

Tällöin $\left(f(j) = \lim_{n\to\infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+ \right)$

$|f_n(j)| \leq |g(j)| \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+$, missä

$\|g\|_{L^1(\mathbb{Z}_+,\mu)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty$. Näin ollen

Lebesguen dominoidun konvergenssin nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}}_{\int} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}}_{f_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}}_{\int} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}}_{f} .$$

3.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ mitallisia ja $g \in L^1(\mu)$ s.e. $f_k \geq g$ μ-m.k. $\forall k$. Asetetaan $\tilde{f}_k = \max(f_k, g)$, missä $\tilde{f}_k = f_k$, kun $f_k \geq g$, ja $\tilde{f}_k = g$, kun $f_k < g$. Näin ollen $h_k := \tilde{f}_k - g \geq 0$ kaikkialla. ~~Koska~~ $f_k \geq g$ μ-m.k. $\forall k$, joukolle $A := \{x : f_k(x) < g,\ k = 1, 2, \dots\}$ on voimassa $\mu(A) = 0$. Siispä soveltamalla Fatoun lemmaa jonoon h_k saadaan

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} h_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu$$

$\iff$

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} (\tilde{f}_k - g) \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X (\tilde{f}_k - g) \, d\mu$$

$\iff$

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} \tilde{f}_k \, d\mu - \cancel{\int_X g \, d\mu} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X \tilde{f}_k \, d\mu - \cancel{\int_X g \, d\mu}$$

$\underset{g \in L^1(\mu)}{\iff}$

$$\int_{X\setminus A} \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu + \cancel{\int_A g \, d\mu} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{X\setminus A} f_k \, d\mu + \cancel{\int_A g \, d\mu}$$

$$\underset{\mu(A)=0}{\iff} \int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu .$$

4.

Selvästi määritelmän perusteella

$$0 \leq \lambda^*(E) \leq \infty .$$

Erityisesti $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Oleellista on todistaa, että λ^* on subadditiivinen, ts. jos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ on jono joukkoja $(A_1, A_2, \ldots \subset X)$ niin

$$\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) .$$

Huomataan, että jos $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) = \infty$ on väite triviaali. Olkoon siis $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) < \infty$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin jokaista indeksiä i kohden valitaan suljettujen välien muodostama perhe $\{I_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $I_k^i = [a_k^i, b_k^i]$, s.e. $A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k^i - a_k^i| < \lambda^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Koska

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$$

ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^i - a_k^i| < \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda^*(A_i) + \varepsilon/2^i \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i'=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|b_k^{i'}-a_k^{i'}| < \sum_{i'=1}^{\infty}\lambda^*(A_{i'}) + \varepsilon,$$

mistä seuraa

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{i'=1}^{\infty}A_{i'}\Big) < \sum_{i'=1}^{\infty}\lambda^*(A_{i'}) + \varepsilon .$$

Koska $\varepsilon>0$ oli mielivaltainen,

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{i'=1}^{\infty}A_{i'}\Big) \le \sum_{i'=1}^{\infty}\lambda^*(A_{i'}) .$$

$\therefore$ λ^* on ulkomitta.

Suljettu väli $[a_{i'}, b_{i'}]$ voidaan korvata avoimella välillä $(a_{i'}, b_{i'})$. Sillä:

Olkoon $\varepsilon>0$. Koska

$$I_{i'} = [a_{i'}, b_{i'}] \subset \Big(a_{i'}-\frac{\varepsilon}{2^{i'+1}}, b_{i'}+\frac{\varepsilon}{2^{i'+1}}\Big) =: J_{i'},$$

$E \subset \bigcup_{i'=1}^{\infty} I_{i'} \subset \bigcup_{i'=1}^{\infty} J_{i'}$; $(E\subset\mathbb{R})$. Näin ollen

$$\sum_{i'=1}^{\infty}|b_{i'}+\varepsilon/2^{i'+1}-a_{i'}+\varepsilon/2^{i'+1}| = \sum_{i'=1}^{\infty}|b_{i'}-a_{i'}| + \varepsilon$$

ja

$$\begin{aligned}\lambda^*(E) &= \inf\Big\{\sum_{i'=1}^{\infty}|b_{i'}-a_{i'}| : I_{i'}=[a_{i'},b_{i'}],\ E\subset\bigcup_{i'=1}^{\infty}I_{i'}\Big\}\\ &= \inf\Big\{\sum_{i'=1}^{\infty}|b_{i'}-a_{i'}| : J_{i'},\ E\subset\bigcup_{i'=1}^{\infty}J_{i'}\Big\} + \varepsilon\end{aligned}$$

jokaisella $\varepsilon>0$. Antamalla $\varepsilon\to 0$, saadaan väite.

5.

Joukko

$$S(n,k) = \bigcap_{i,j>n} \{x \in X : |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\} \in \mathcal{M}$$

(tämä näytettiin Harjoitus 1 tehtävässä 5).

Olkoon jonon $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo $f(x)$ $\forall x \in X$. Koska jono suppenee, se on Cauchy-jono. Näin ollen $\forall k \in \mathbb{N}_+$ $\exists n \in \mathbb{N}_+$ s.e. $x \in S(n,k)$. Tästä seuraa $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(n,k)$ $\forall k \in \mathbb{N}_+$.

Koska $S(n,k) \subset S(n+1,k)$ $\forall n,k$, $\mu(S(n,k)) \longrightarrow \mu(X)$, kun $n \longrightarrow \infty$ (ks. Rudin Theorem 1.19 d s. 16) $\forall k \in \mathbb{N}_+$. Näin ollen voidaan valita luvut n_k s.e.

$$\mu(S(n_k,k)) > \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^k} .$$

Asetetaan $E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} S(n_k,k)$. Olkoon siis löydetty mitallinen joukko E, jolle mahdollisesti $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ s.e. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti tässä joukossa. Todistetaan, että näin todella on:

$\forall \varepsilon = 1/k > 0 \ (k \in \mathbb{N}_+) \ \exists \ n := n_k \in \mathbb{N}_+$ s.e.

$|f_i(x) - f_j(x)| < 1/k$, kun $i, j > n_k \ \forall x \in E$.

Tämä koska $E \subset S(n_k, k)$. Näin ollen saadaan

$$|f_i(x) - f(x)| = \lim_{j \to \infty} |f_i(x) - f_j(x)| \leq 1/k$$

$\therefore \ \forall 2/k > 0 \ \exists n_k$ s.e. $|f_i(x) - f(x)| < 2/k$,

kun $i > n_k \ \forall x \in E$ ($\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee ~~tasaisesti~~ E:ssä).

~~Koska~~

$$\begin{aligned}\mu(X \setminus E) = \mu(E^c) &= \mu\Big(\big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} S(n_k, k)\big)^c\Big) \\ &= \mu\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} S(n_k, k)^c\Big) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S(n_k, k)^c) \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,\end{aligned}$$

väite on todistettu. $\square$

Huomautuksia

(1) Oletus $\mu(X)<\infty$ on oleellinen.

Jos $X=\mathbb{R}$, μ = Lebesguen mitta ja $f_n(x)=\frac{x}{n}$, niin $f_n(x)\longrightarrow 0$ $\forall x$.

Mutta arvolla $k=1$ (ts. $1/k=1$) sama n_1 ei kelpaa jokaiselle $x\in E$: valitsemalla $x>n_1$ saadaan

$$|f_{n_1}(x)-0|=\left|\frac{x}{n_1}-0\right|>1 .$$

Tältä vältytään, jos $(n_1,\infty)\subset X\setminus E$, mutta tällöin $\mu(X\setminus E)=\infty$ (ja siis $\mu(X)=\infty$).

(2) Aina ei voida valita $E=X$.

Jos $X=(0,1)$ ja $f_n(x)=\frac{1}{nx}$, niin $f_n(x)\longrightarrow 0$ $\forall x$. Mutta valitsemalla $x<\frac{1}{n_1}$ saadaan $|f_{n_1}(x)-0|=\left|\frac{1}{n_1x}-0\right|>1$.