Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 2, 29.9.2004

Ratkaisuehdotuksia (WM)

1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integroituva $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$.

Muuttujanvaihdolla saadaan

$$\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,dx = n^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} |f(nx)|\,dx$$

$$= n^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, n^{-1}\,dy$$

$y = nx$
$dy = n\,dx$
$n \neq 0$

$$= n^{-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy$$

$$=: n^{-\alpha-1} \beta =: \beta_n \text{ , missä}$$

$\beta := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$. Näin ollen

$$\gamma := \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-1} < \infty \quad (\alpha + 1 > 1).$$

Rudin: Lause 1.27, 1.22 nojalla

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-\alpha} f(nx)|\,dx < \infty$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-\alpha} f(nx)| < \infty \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow |n^{-\alpha} f(nx)| \longrightarrow 0,\ n \to \infty \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

(*): olkoon $f : X \to [0,\infty]$ mitallinen ja
$\int_X f\, d\mu < \infty$. Silloin $f(x) < \infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}$.

Syy:

olk. $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$
(mitallinen joukko sillä f mitallinen).

$f(x) \geq j \quad \forall\, x \in A,\ j = 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$j\chi_A \leq f\chi_X \quad \forall j \quad \Rightarrow$

$\int_X f\, d\mu \geq \int_X j\chi_A\, d\mu = j\mu(A) \quad \forall j \quad \Rightarrow$

$0 \leq \mu(A) = \frac{1}{j}\int_X f\, d\mu \longrightarrow 0$, kun $j \to \infty$

$\therefore\ \mu(A) = 0.$

Huomio:

Teimme yllä muuttujanvaihdon $\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha-1} f(y)|\, dy$ Lebesguen integraalille kuten se tehdään Riemannin integraalille. Muuttujanvaihtoa käsittelevä lause (Theorem 7.26) on todistettu Rudinissa s. 153. Vaihtoehtoisesti voi tutkita asian yksinkertaistenfunktioiden kautta: muuttujanvaihto on voimassa yksinkertaisilla funktioilla, joten se on voimassa myös funktiolle f. Todistukset sivuutetaan.

2.

a)

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ määritelmän mukaan

$X^c = \emptyset$ äärellinen $\Rightarrow X \in \mathcal{T}$.

(ii) $V_i \in \mathcal{T}$, $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$, jolloin

V_i^c äärellinen $\forall i = 1, \dots, n$. Silloin

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} V_i^c \text{ äärellinen } \Rightarrow$$

$\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{T}$. Jos $V_i = \emptyset$ jollakin i, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \emptyset \in \mathcal{T}$.

(iii) $\{V_\alpha\} \in \mathcal{T}$, $V_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ jokin indeksijoukko). Koska $V_\alpha \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$

V_α^c äärellinen $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

$\bigcup_\alpha V_\alpha \in \mathcal{T}$ sillä

$$\left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha V_\alpha^c \subset V_\alpha^c \quad (\text{jollakin } \alpha \in \mathcal{A}).$$

$\therefore$ $\mathcal{T}$ siis on topologia.

Kun X varustetaan kofiniittillä topologialla $\mathcal{T}$, X:n osajoukot joukot ovat äärellisiä (tai X).

Avaruus X on kompakti joss

$$\{V_\alpha\} \subset \mathcal{T},\ \bigcup_\alpha V_\alpha = X \implies \exists \text{ äärellinen } \{V_i\}_{i=1}^n, \text{ jolla } \bigcup_{i=1}^n V_i = X.$$

Koska topologia on kofiniittinen

V_α avoin $\iff V_\alpha^c = X \setminus V_\alpha$ äärellinen.

Toisin sanoen jokainen avoin joukko jättää huomioimatta ainoastaan äärellisen määrän X:n pisteitä. Nyt kutakin tällaista pistettä kohden löytyy V_α jollakin $\alpha \in \mathcal{A}$. Koska pisteitä oli äärellisen monta, $\exists$ äärellinen $\{V_i\}_{i=1}^n$ s.e. $\bigcup_{i=1}^n V_i = X$.

b) jatkuvat funktiot ovat vakioita. Syy:

Tehdään vastaoletus f ei ole vakio.

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ s.e. $a > b$ ja $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$.

Määritellään joukot

$$A := f^{-1}((a-\varepsilon, a+\varepsilon))$$
$$B := f^{-1}((b-\varepsilon, b+\varepsilon)).$$

Koska f on jatkuva, $A, B \in \mathcal{T}$ (avointen joukkojen alkukuvat avoimia jatkuvassa kuvauksessa). Näin ollen A^c ja B^c ovat äärellisiä. Toisaalta, koska f on jatkuva $A \cap B = \emptyset \implies A \subset B^c$ ja $B \subset A^c \implies A$ ja B äärellisiä, mikä on ristiriita.

3.

a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$:n Borel-$\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ on pienin σ-algebra, joka sisältää $\mathbb{N}$:n kaikki avoimet joukot (siis $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$). Joukot, jotka ovat muotoa $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \in \mathcal{B}$, koska $A_n^c = \{1, 2, \dots, n-1\}$ äärellinen ($\Rightarrow A_n \in \mathcal{T}$). Erityisesti $\{n\} = A_n \cap A_{n+1}^c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, joten yleisät $\{n\} \in \mathcal{B}$. Koska $\mathbb{N}$:n osajoukot saadaan numeroituvana yhdisteenä näistä joukoista, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{B}$. Määritelmän mukaan $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, joten $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Olkoon $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y$, missä Y on topologinen avaruus varustettuna topologialla $\mathcal{T}_Y$ (esim. $Y = \mathbb{R}$). Nyt kuvaus f on Borel-mitallinen, jos $\forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$. Koska nyt $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on kaikilla $V \in \mathcal{T}_Y$ $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$. Siis kaikki kuvaukset ovat Borel-mitallisia.

4.

1) Koska $\forall k$ $\mu_k(\emptyset) = 0$, $\mu(\emptyset) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(\emptyset) = 0$.

2) Olkoon $A_1, A_2, \ldots$ pistevieraita, mitallisia joukkoja ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$).

Tällöin

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_k(A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

$$\overset{(n\to\infty)}{\Rightarrow}$$

$$\mu_k\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$\overset{(k\to\infty)}{\Rightarrow}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad . \quad (1)$$

Toisaalta

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_k(A_i) = \mu_k\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \mu_k\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$\overset{(k\to\infty)}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$\overset{(n\to\infty)}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad . \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ μ numeroituvasti additiivinen.

1) + 2) $\Rightarrow$ μ mitta.

5.

Koska f_n on rajoitettu jokaisella $n \in \mathbb{N}$,
$\exists\, M(n) < \infty$ s.e. $|f_n(x)| \leq M(n) \quad \forall x \in X$.

$f_n \longrightarrow f$ tasaisesti X:ssä $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.e. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$,
kun $n \geq n(\varepsilon)$. Näin ollen, kun $\varepsilon = 1/2$

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)| &= |f_n(x) - f_N(x) + f_N(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\
&= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\
&\leq 1/2 + 1/2 + M(N) = 1 + M(N)
\end{aligned}
$$
, kun $n \geq N$
$\forall x \in X$.

Kun $n < N$, $\exists\, M < \infty$ s.e. $|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in X, n < N$.
Olkoon vakio C suurempi näistä ja
asetetaan $g(x) = C$. Koska $\mu(X) < \infty$,

$$\int_X g \, d\mu = C \mu(X) < \infty$$

eli $g \in L^1(\mu)$. Lebesguen dominoidun konvergenssin
lauseesta seuraa

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \, .$$

Jos $\mu(X) = \infty$, asetetaan $X = \mathbb{R}$ ja

$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n, n^2]}$. Tällöin

$$f_n \longrightarrow 0 \quad \text{tasaisesti } \mathbb{R}\text{:ssä}$$

ja

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \int_n^{n^2} \frac{1}{n} \, d\mu = n - 1 .$$

Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \infty \neq \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 0 .$$