TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 8
4.11–11.11.2002

**1.** Määritä luvut $c_{-2}$, $c_{-1}$, $c_1$ ja $c_2$ siten, että jos $p$ on astetta 3 oleva polynomi jolle pätee $p(x_0 - \frac{3}{2}h) = f_{-2}$, $p(x_0 - \frac{1}{2}h) = f_{-1}$, $p(x_0 + \frac{1}{2}h) = f_1$ ja $p(x_0 + \frac{3}{2}h) = f_2$ niin $f(x_0) = c_{-2}f_{-2} + c_{-1}f_{-1} + c_1 f_1 + c_2 f_2$.
*Vihje: Kirjoita $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)$ jolloin ainoastaan on ratkaistava $a_0$.*

**2.** Olkoon $\alpha$ seuraava jono:

$$
\begin{aligned}
\alpha(0) &= \tfrac{1}{8}(1 + \sqrt{3}),\\
\alpha(1) &= \tfrac{1}{8}(3 + \sqrt{3}),\\
\alpha(2) &= \tfrac{1}{8}(3 - \sqrt{3}),\\
\alpha(3) &= \tfrac{1}{8}(1 - \sqrt{3}),\\
\alpha(k) &= 0 \quad \text{muuten.}
\end{aligned}
$$

Laske jono $\gamma(n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha(j)\alpha(j+n)$ kun $n$ on pariton. (Aikaisempien laskujen perusteellahan tiedetään, että $\gamma(2n) = \frac{1}{2}\delta_{0,n}$.)

Miten nämä luvut liittyvät edellisessä tehtävässä laskettuihin lukuihin?

**3.** Olkoon $\alpha$ seuraava jono missä $\alpha(0) = \alpha(2) = \frac{1}{2}$ ja $\alpha(n) = 0$ muuten. Määrittele funktiot $F_j$, $j \geq 0$ siten, että $F_0(n) = \delta_{0,n}$,

$$F_{j+1}(2^{-j-1}n) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(n-2k)F_j(2^{-j}k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0,$$

ja muilla arvoilla funktiot $F_j$ määritetään lineaarisella interpolaatiolla, eli $F_j(\underline{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_j(2^{-j}n)w(2^j\underline{x} - n)$ missä $w(\underline{x}) = \max\{0, 1 - |\underline{x}|\}$. Mitä tapahtuu funktioille $F_j$ kun $j \to \infty$.