TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 3
30.9–7.10.2002

1. Mitä voit sanoa seuraavasta päättelystä: Jos $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ niin silloin myös $\int_{\mathbb{R}} \psi(2^{-m}t - k)\,\mathrm{d}t = 0$ kaikilla kokonaisluvuilla m ja k ja silloin ei ole esim. mahdollista kirjoittaa

$$\mathrm{e}^{-\underline{t}^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{m,k}\psi\left(2^{-m}\underline{t} - k\right),$$

missä sarja suppenee $L^2(\mathbb{R})$:ssä koska $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$.

2. Olkoot α ja β jonoja joilla on ainoastaan äärellisen monta nollasta poikkeavaa termiä ja oletetaan, että matriisi

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(\frac{\omega}{2}) & \hat{\alpha}(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}) \\ \hat{\beta}(\frac{\omega}{2}) & \hat{\beta}(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

on unitaarinen kaikilla ω. Miten tätä ehtoa voidaan esittää (matriisimuodossa tai ilman matriiseja) käyttäen funkioita $A(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)z^k$ ja $B(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta(k)z^k$ missä $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja millä z:n arvoilla se on voimassa?

3. Oleta tunnetuksi seuraava väite: Jos $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ niin $\{\, 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m} \bullet - k)\,\}_{m,k\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta avararuudessa $L^2(\mathbb{R})$ jos ja vain jos

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\psi}(2^m\bullet)\right|^2 \overset{\text{a.e.}}{=} 1,$$

ja

$$\sum_{p=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^p\bullet)\overline{\hat{\psi}\big(2^p(\bullet+k)\big)} \overset{\text{a.e.}}{=} 0 \quad \text{kaikilla parittomilla kokonaisluvuilla } k.$$

(i) Onko $\{\, 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}\bullet - k)\,\}_{m,k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali kanta avararuudessa $L^2(\mathbb{R})$ jos $\hat{\psi}(\omega) = 1$ kun $\frac{1}{2} \le |\omega| \le 1$ ja 0 muuten?

(ii) Jos nyt $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\{\, 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}\bullet - k)\,\}_{m,k\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta avararuudessa $L^2(\mathbb{R})$, ja ϕ on ψ:n Hilbert-muunnos, eli $\phi(\underline{t}) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|\underline{t}-s|\ge\epsilon} \frac{\psi(s)}{\underline{t}-s}\,\mathrm{d}s$, niin onko myös $\{\, 2^{-\frac{m}{2}}\phi(2^{-m}\bullet - k)\,\}_{m,k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali kanta $L^2(\mathbb{R})$:ssä?

Vihje: $\hat{\phi}(\underline{\omega}) = -\mathrm{i}\,\mathrm{sign}\,(\underline{\omega})\hat{\psi}(\underline{\omega})$.