Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 4, viikko 7

1. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra, $x, y \in \mathcal{A}$ ja $xy = yx$. Osoita, että $\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ ja $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.
   (Vinkki: miten **kommutatiivisessa** Banach-algebrassa alkion spektri ja algebran spektri liittyvätkään toisiinsa...?)

2. Olkoon $\mathcal{A} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{ix\cdot n},\ \|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < \infty \right\}$. Todista:

   (a) $\mathcal{A}$ on kommutatiivinen Banach-algebra.

   (b) Jos $f \in \mathcal{A}$, $\forall x: \ f(x) \neq 0$, niin $1/f \in \mathcal{A}$.

3. Banach-algebran $\mathcal{A}$ *radikaali* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ on sen maksimaalisten ideaalien leikkaus (voidaan osoittaa, että $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \forall z \in \mathcal{A}: \ \rho(xz) = 0\}$). Osoita, että jos $\mathcal{A}$ on kommutatiivinen, niin

   (a) $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(x \mapsto \widehat{x})$, missä $x \mapsto \widehat{x}$ on Gelfand-muunnos;

   (b) $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \rho(x) = 0\}$;

   (c) Nilpotentit alkiot kuuluvat radikaaliin. (Tässä kommutatiivisuutta ei tarvita.)

4. (a) Olkoon X äärellinen joukko. Millainen on funktioiden $f : X \to \mathbb{C}$ Banach-algebran $\mathcal{F}(X)$ Gelfand-muunnos?

   (b) Millainen on matriisien $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) Banach-algebran $\mathcal{A}$ Gelfand-muunnos?

5. (Weierstrassin lauseen todistuksen viimeistely.) Olkoon $k_n(x) := \dfrac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}$, kun $|x| \leq 1$ (ja $k_n(x) = 0$, kun $|x| > 1$). Osoita, että

$$\int_\delta^1 k_n(x)\,\mathrm{d}x \to_{n\to\infty} 0,$$

   kun $0 < \delta < 1$.

6. Olkoon K kompakti Hausdorff-avaruus, $\emptyset \neq S \subset K$ ja olkoon $\mathcal{J} \subset C(K)$ ideaali. Määritellään

$$\mathcal{I}(S) := \{f \in C(K) \mid \forall x \in S: \ f(x) = 0\}, \quad V(\mathcal{J}) := \{x \in K \mid \forall f \in \mathcal{J} : f(x) = 0\}.$$

   Osoita, että

   (a) $\mathcal{I}(S) \subset C(K)$ on suljettu ideaali,

   (b) $\emptyset \neq V(\mathcal{J}) \subset K$ on suljettu joukko,

   (c) $V(\mathcal{I}(S)) = \overline{S}$ (vinkki: Urysohn),

   (d) $\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) = \overline{\mathcal{J}}$ (vinkki: Stone–Weierstrass).