

# Laplacen yhtälö ja siihen liittyvä ominaisarvotehtävä

Helena Aro ja Maria Pusa

## Kirjallisuutta

1. Moler: pdes.pdf
2. Cooper: Intro to PDEs with Matlab
3. Betounes: PDEs with comp sci with Maple
4. Kahaner–Moler–Nash: Numerical Methods and Software s. 220: The SVD for LSQ.

## Ominaisarvotehtävän analyttinen ratkaisu ympyräsektorissa

Opiskele (Coo) 8.4. s. 315: "Eigenfunctions for the disk", sen pohjalta on helppo tehdä tehtävä 6 s. 321–322. Jospa toinen tekisi sen siinä muodossa kuin kirjassa ja toinen siten kuin Molerissa sitä tarvitaan, eli Dirichlet'n 0-RE kaikilla reunoilla.

Maple-ehdotuksia:

- Kirjoita syntyvä Besselin diffyhtälö ja ratkaise dsolvella (analyttisesti).
- ?Bessel. Huomaa, että Besselin funktioiden nollakohdat ovat suoraan saatavilla, esim. `BesselJZeros`.
- Jos noudatetaan Cooperin notaatiota, voitaisiin määritellä vaikka:  
`lam:=(n,M)->BesselJZeros(s(n), 1..M);`  
Tietysti  $s(n)$  määritellään sopivasti. Voitaisiin vaikka muodostaa sopivalla for-silmukalla listat `L[1], L[2], ...`, siten, että `L[n]`:ssä on  $J_{s(n)}$ :n nollakohtia tiettyyn rajaan saakka. Huomaa, että `sort` puree listaan.
- Ominaisfunktiot voidaan määritellä tyyliin:  
`phi:=(n,m,r,Theta)->...;` Visualisointia: Maplen sylinterikoordinaattipiirto on hieman omituinen, mutta sen voi muuttaa tavanomaisen tyyliseksi helpissä neuvotulla tavalla:

```
addcoords(z_cylindrical,[z,theta,r],[r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
#ja sitten:
plot3d(phi(3,2,r,Theta),Theta=0..3*Pi/2,r=0..1,coords=z_cylindrical,
orientation=[-132,71],axes=BOXED,scaling=constrained,style=patchcontour);
```

Mielenkiintoista on tehdä havaintoja mm. sen suhteen, miten eri  $n$ :n arvot näkyvät kuvissa.

Mitenkään huono juttu ei olisi tehdä samoja hommia Matlabilla. Siinä on Besselin funktiot myös saatavilla. Jos Nollakohtia ei saa suoraan, niin tässä on oiva tilaisuus siirtää Maplesta Matlabiin.

Osaatteko Matlabin napakoordinaatti-meshgrid-piirron? Se on neuvottu Cooperissa mm. siinä alkuaikana jaetussa Matlab-liitteessä.

## PNS-approksimaatio

Perusidea on selitetty Molerissa varsin tiiviisti. Ennenkuin käynte koodin kimppuun, olisi varmasti mielekkäämpää toteuttaa itse jossain muodossa joko Maplella tai Matlabilla.

Tähän sopisi pieni esittely SVD:stä ja sen käytöstä. Lähteenä voisi käyttää vaikka 4:sta. (Voin antaa lainaksi.) Siinä on muitakin tapoja PNS:ään, kuten QR-hajotelma, mutta SVD on varmasti luotettavin.

## Alkupuolen differenssimenetelmä

Tästä ajattelisin, että siihen voisi ottaa hieman yleisemmän asentaan kuin pyrkimisen L:ään. Sitä L-toteutusta mallina käyttäen voisi tehdä joitakin muita alueita, aloittaa sopisi yksinkertaisimmasta: suorakulmiosta. Siis reunaehdot ja lähdetermi, miten ne rakennetaan systeemiin. Tässä voisi ottaa Poissonin yhtälön lisäksi ominaisarvotehtävän. Hyviä apufunktioitahan on noissa Molerin m-fileissä. Voidaan keskustella lisää...

## Laplacen yhtälön analyyttinen ratkaisu ympyräalueessa (sektorissa)

Tämä voisi olla sopiva lisä ja vertailukohta ominaisvoteltävään. Tässä ei tule Besselin funktioita, vaan  $r$ :n potensseja (logaritmikin on tarjolla).

Tästä voisi laajentaa harmonisten funktioiden suuntaan, Poissonin ytimeen ym., mutta voi laajeta liikaa. Toisaalta vertailu numeeriseen menetelmään, joko edellä käsiteltyyn tai vaikka vaan pdetool:lla laskettuun.