Luento 9, 22.3.05

Cooper Ch 4 (jaossa)

Lämpöyhtälön reuna-arvotehtävät

- Erilaisia reunaehtoja $\Rightarrow$ erilaisia om. funkt. esityksiä
- Asymptoottinen käytös, $t \to \infty$, "steady state"
- yleistä om.-arvoteoriaa, tarvitaan myös muissa yhteyksissä
- Epähomog. yhtälö, lämmönlähteet, epähomog. RE:t.

4.1. Muuttujien erottelu (vanhan kertausta)

$$u_t = k u_{xx}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t) \quad (= X(x)T(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \psi'(t) + \lambda k \psi(t) = 0 \end{cases}$$

Merk. $M\varphi = -\varphi''$; $\quad M\varphi = \lambda\varphi$ ominaisarvoteht.

RE:t $\Rightarrow$ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $\quad \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$

$$\psi_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$$

Muodollinen ratk.:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x)\psi_n(t)$$

(AE) tot. valitsemalla A_n f:n sinisarjan (eli "φ_n-sarjan") kertoimeksi.

Ortogonaalisuus $\Rightarrow$ A_n on helppo laskea.

Yleisen teorian pääpiirteissään:

<u>Määr:</u> Olk. $X = C[0, L]$. Määr. sisätulo

$$\langle f, g\rangle = \int_0^L f(x)\,g(x)\,dx.$$

<u>Määr:</u> $\|f\| = (\langle f, f\rangle)^{1/2}$

Tavalliset ominaisuudet ovat voimassa.

<u>Cauchy – Schwarz</u>: $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$.

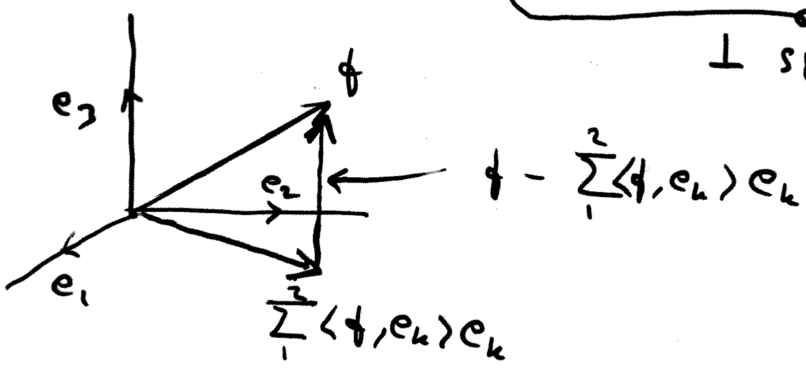
$\Rightarrow \|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$.

<u>Pythagoraan lause</u> $f \perp g \Rightarrow$

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

Olk. $\{e_1, \dots, e_N\}$ ortonormaali. Tällöin mielív. $f \in X$ voidaan esittää muodossa

$$f = \underbrace{\left(f - \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k\right)}_{\perp\, sp\{e_k\}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k}_{\in\, sp\{e_k\}}$$



Pythagoras $\Rightarrow$
$$\|f\|^2 = \left\|f - \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{N}|\langle f, e_k\rangle|^2$$

$\Rightarrow$ <u>Besselin epäyhtälö</u>: $\sum_{k=1}^{N}|\langle f, e_k\rangle|^2 \le \|f\|^2$

Fourier-esitys: $\quad f = \sum_{n=1}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left\langle f, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\rangle \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \sum_n \underbrace{\frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}}_{A_n} \varphi_n$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{2}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx .$$

Besselin ey φ_n:n avulla: $\quad \left(e_k = \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \right)$

$$\sum_k \left| \left\langle f, \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \right\rangle \right|^2 \le \|f\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_k |\underbrace{\langle f, \varphi_k \rangle}_{(\frac{L}{2})^2 A_n}|^2 \le \frac{L}{2} \|f\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{N} |A_n|^2 \le \|f\|^2 .$$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \infty$, erit. $A_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

<u>Huom!</u> Saimme tämän tuloksen varsin kevyesti, ei siis tarvita välttämättä Riemann-Lebesgue-lemmaa. (Besselin ey on selkeästi helpompi kuin R-L-lemma.)

<u>Syvällinen kysymys</u>: Onko ominaisvektoreita tarpeeksi? Ts., onko omin. vektorien joukko "kanta" siinä mielessä, että jokainen $f \in C[0, L]$ voidaan esittää: $\quad f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n \quad$ ($\|\cdot\|_2$:n suht.)

Synällinen vastaus : Kyllä ! Riesz - Fischerin lause .

Voidaan ottaa isompi avaruus kuin $C[0,L]$, kaikki paloittain jatkuvat . Itse asiassa "oikea" avaruus on vieläkin isompi : $L^2[0,L]$.

Huom ! Fourier - sarjan pisteittäisen suppenemisen on eri asia ; ei seuraa tästä .

Tämä sanoo , että

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^L \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n \varphi_n(x) \right|^2 dx = 0 .$$

Jos $\{\varphi_n\}$ on avaruuden $\underline{X}$ ortog. kanta yo. mielessä (eli täydell. OG syst.), niin Besselin ey : ssä pätee = .

$$\|f\|^2 = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2$$

Miten f : n säännöllisyysominaisuudet vaikuttavat Fourier - kehitelmien supp. nopeuteen?

(1) f : n säännöllisyys

(2) Miten RE : t toteutuvat ?

Esimerkkejä : Harj. tehtä 1 (Jos myös $f'(0) = f'(L) = 0$,
[Coo] s. 120 void. os. int. jatkaa ...)

Eri suppenemislajien vertailu

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Pisteittäinen suppeneminen : $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Annettu $x \in [a,b]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ s.e. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kun $n \geq N_\varepsilon$.

Yleensä : N_ε riippuu x:stä

2. Tasainen suppeneminen

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ s.e. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kun $n \geq N_\varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$

N_ε ei riipu x:stä

Ts. $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, kun $n \to \infty$.

Lause : f_n jatk. $f_n \to f$ tas. väl. $[a,b]$

$\Rightarrow f$ jatk.

(Tällöin sup = max)

3. L^2 - suppeneminen (conv. in the mean sq.)

$\|f - f_n\|_2 \to 0$, kun $n \to \infty$, ts.

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Ainoa yleinen relaatio : 2. $\Rightarrow$ 3.

$$\left[\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|^2 \right.$$

$$\left. \to 0, \text{ kun } n \to \infty. \right]$$

Weierstrassin M-testi, sarjan derivointi ja integrointi termeittäin

([Co] ss. 6 – 7, Rudin: Principles of math. anal. (Moodle))

Weierstrassin M-testi: Olk. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, ol. $|f_n(x)| \le M_n$ $\forall x \in [a,b]$.
Ol. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ suppr. tas. väl. $[a,b]$.

Tod. Välitön seuraus määritelmästä.

Lause [Rajafkt. jatk., integr., der.]
Ol: $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatk. ja sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \quad \text{supp. tas. väl. } [a,b].$$

Tällöin
(a) summafkt. $s(x)$ on jatkuva
(b) sarjan integrointi termeittäin on luvallista:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(c) Jos lisäksi f_n jatk. der. $\forall n$ ja jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{supp. tas. väl. } [a,b],$$

niin sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ termeittäin deriv. on sallittua:

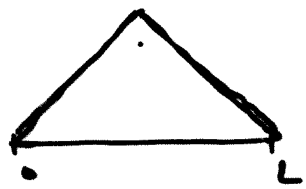
$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Esim 1) $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le L$

$$A_n \; (= b_n) = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ei voida päätellä, että $\sum |A_n| < \infty$.

Esim 2) Harj: 6, teht 1 (b)



$$\Longrightarrow \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Fourier-sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ supp. tas. välillä $[0, L]$

(Weierstrassin M-testi)

Lämpöyhtälön ratkaisun olemassaolo ja 1-kas.

$$u_t = k\, u_{xx}.$$

Mahdollinen ratk. $u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t).$$

Jos termeittäin derivointi (myös derivaattasarjoille) on luvallista, niin

$$u_t - k\,u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right) = 0$$

[Tämähän järjestettiin muutt. erottelussa, toki helppo derivoimalla tarkistaa.]

Weierstrassin M-testi putoaa suoraan syliin:

$|u_n(x,t)| \le |b_n| e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = |b_n| \gamma^{n^2}$,

missä $\gamma_t = e^{-k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$. $\gamma_t < 1$, kun $t > 0$.

Derivaattasarjoille saadaan samanlaiset arviot (vain vakiokertoimet edessä eril.)

Weierstrassin M-testi puree, joten Lauseen mukaan sarja $u(x,t)$ tot. (LY):n, kun $x \in [0,L]$, $t > 0$.

(Sarjat supp. tas. joukossa $0 \le x \le L$
$t \ge \delta > 0$

$(M_n = \gamma(\delta)^{n^2} \le \gamma(\delta)^n$, geom. sarja)

<u>Lause 4.1</u> Olk. $f \in C[0,L]$, $f(0) = f(L) = 0$.

Tällöin $\exists$ yksikäs. ratk. $u(x,t)$ $\in C^\infty$ lämpöyhtälölle

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

<u>Tod</u>: Sarja $u(x,t)$ tot. yhtälön ja on C^∞, kun $t > 0$, $x \in [0,L]$.

Onko $u(x,t)$ jatk., kun $t = 0$?

Tässä ei yo. arvio pure, sillä $\gamma_0 = 1$.

Jos tehdään lisäoletus: $f \in C^1[0,1]$, saadaan arvio $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ [Harj. tehtävä. $f \in C^2$]

Weierstrass $\Rightarrow$ sarja supp. tas. joukossa $a \le x \le b$, $t \ge 0$, joten Lauseen mukaan $u(x,t)$ on siinä jatk.

(Suurilla [illegible] Riittää että [illegible] on jatk. ?)

<u>yksikäs</u>: Olk. u ja v ratkaisuja.

Tällöin $w = u - v$ on ratk., joka tot. 0 - AE:n.

Max-periaate $\Rightarrow$ Mielivalt. $T > 0$ pätee:

$$\max_{\substack{0 \le x \le L \\ 0 \le t \le T}} w(x,t) = \max_{\Gamma_T} w(x,t) = 0$$

Samoin min.

Siis $0 \le w(x,t) \le 0 \quad \forall (x,t) \in$ 

$T > 0$ mieliv. $\Rightarrow$ $u = v$, kun $0 \le x \le L$, $t \ge 0$.

$\square$

"well posed"

Lisäksi tehtävä on "hyvinasetettu", eli ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuehdosta (datasta):

Jos f ja g AE - fkt., reunoilla $= 0$

$\Rightarrow$ vast. ratk. erotus $u - v$ tot. yhtälön, kun alkuehtona on $f - g$. Max-periaate

$$\Rightarrow \max_{\substack{0 \le x \le L \\ t \ge 0}} |u(x,t) - v(x,t)| = \max_{0 \le x \le L} |f(x) - g(x)|.$$

<u>Virhearvioita</u>

Miten monta termiä sarjasta on otettava, jotta annettu virhetoleranssi alittuisi.

Selvästi:
- Suurilla t:n arvoilla tarvitaan vain muutama (1.)
- $t = 0$ on vaativin. Siinä ollaan pelkän Fourier-sarjan armoilla.

Seuraavissa on otettu $k = 1$.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$e_N(x,t) = u(x,t) - u_{N-1}(x,t)$$
$$= \sum_{n=N}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Merk. $q_n = e^{-n\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$;

$$e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = q_n^n \le q_N^n, \quad \text{kun } n \ge N.$$

Saadaan suppen. geom. majorantti, kun $t > 0$.

$$|e_N(x,t)| \le \max_{n \ge N} |b_n| \sum_{n=N}^{\infty} q_N^n =$$

$$= \max_{n \ge N} |b_n| \frac{q_N^N}{1 - q_N} = \max|b_n| \frac{e^{-\left(\frac{N\pi}{L}\right)^2 t}}{1 - e^{-N\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}}$$
$(t > 0)$

Huom! Tehtäväpaperin kaavassa $\frac{\pi}{L} \to \frac{\pi^2}{L^2}$

(korjataan ti 22.3.)

[Näitä arvioita ei ole Cooperissa.]

Epähomog. RE:t ja "steady state"-ratk.

$u(0,t) = \alpha$, $u(L,t) = \beta$, $t \ge 0$.

Ajasta riippumaton ratk. u: $u_t = 0$

$\Rightarrow u_{xx} = 0$. $U = U(x)$, $U''(x) = 0$

$\Rightarrow U(x) = Ax + B$.

RE:t $\Rightarrow U(0) = \alpha$, $U(L) = \beta$ $\Rightarrow$

$$U(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L}\, x.$$

4.3. Symmetriset reunaehdot

Tarkastellaan muita homog. reunaehtoja, jotka johtavat ominaisarvoakehitelmiin.

$$\boxed{\begin{array}{c} u_t = k u_{xx} \quad , \quad u(x,0) = f(x) \\ \text{Homog. RE:t} \end{array}}$$

Homog. RE:t määräävät aliavaruuden $W \subset C^2[0,L]$.

Dirichlet: $W = \{ w \in C^2[0,L] \mid w(0) = w(L) = 0 \}$.

Neumann: $W = \{ w \mid w'(0) = w'(L) = 0 \}$

Muuttujien erottelulla johdetaan yhtälöihin

$$\psi'(t) + k\lambda\psi(t) = 0$$

$$M\varphi = \lambda\varphi \quad , \quad M = -\frac{d^2}{dx^2}$$

Aliavaruus W on operaattorin M määrittelyjoukko.

Reuna-arvoihin liittyvä

<u>Määr:</u> Aliav. $W \subset C^2[0,L]$ on symmetrinen operaattorin $M = -\frac{d^2}{dx^2}$ suhteen, jos

$$\langle Mw, z \rangle = \langle w, Mz \rangle \quad \forall w, z \in W.$$

W on "positiivinen", jos $\langle Mw, w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W$.

Osittaisintegroidaan 2 kertaa:

Jos $\int_0^L (-w'z + wz') = 0 \quad \forall w, z \in W$,

niin W symmetrinen.

Ositt. int. kerran $\Rightarrow$

jos $\int_0^L -w'w \geq 0$, niin W posit.

([Coo] s. 132)

Seuraavat RE:t symmetrisiä:

$w'(0) = w'(L) = 0$ (4.29)

$w(0) = w(L) = 0$ (4.30)

$w'(0) = w(L) = 0$

$w(0) = w'(L) = 0$

$w'(0) - h\,w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \; h > 0$

$w'(0) = 0, \quad w'(L) + h\,w(L) = 0$

(Tarkista!)

Yleisesti teoriasta seuraa:
(aivan kuten matriiseille)

- W symm. $\Rightarrow$ M:n ominaisarvot $\in \mathbb{R}$
- W pos. $\Rightarrow$ —— " —— ≥ 0
- W symm. $\Rightarrow$ M:n ominaisvekt. OG.

Osittaisintegroidaan $\Rightarrow \quad \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle \geq \int_0^L (\varphi')^2 \, dx$

Siis, jos $\lambda = 0$ on om. arvo

$\Rightarrow \int_0^L \varphi'^2 \, dx = 0 \quad \Rightarrow \varphi' = 0 \quad \Rightarrow \varphi =$ vakio

Tap. (4.29) (Neumann) $\varphi \neq 0$ tot. RE:t, muissa ei. Siis $\lambda = 0$ on vain tässä tap. om. arvo.